

# 緩和法による経済モデルの数値解法 (計算経済学の研究その24)

## Numerical Analysis of Economic Models Using Relaxation Method

釜 国男<sup>\*</sup>  
Kunio KAMA

多くの動的最適化問題において最適解は鞍点経路の形をとる。鞍点経路の存在や性質について数学的な議論は行われるが、実際に求めた例はほとんどない。通常は均衡点のまわりで線形近似したシステムの固有値を調べるが、これでは均衡点の近傍の性質しかわからない。Mulligan and Sala-i-Martin (1991) は時間を消去する方法を提案しているが、簡単なモデルにしか適用できない。本稿では緩和法と呼ばれる別のアプローチを取り上げることにする。緩和法では微分方程式を代数方程式に置き換えて解を求める。以下で示すように、モデルによっては簡単な計算で高精度の解が得られる。緩和法の考え方を説明したあと、ラムゼイモデル、アイスナー・ストロツツモデル、遅延微分方程式、およびグッドウィンモデルに適用してその有効性を実証する。

### 1. 緩和法

緩和法 (relaxation method) では、微分方程式を代数方程式で置き換えて解を求める<sup>1)</sup>。一般に  $n$  元連立微分方程式の初期値問題はつぎのように表される。

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$y_i(x_0) = y_{i,0} \quad (2)$$

つぎの代数方程式で (1) を近似することが可能である。

$$y_{i,k} - y_{i,k-1} - (x_k - x_{k-1}) f_i \left[ \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}), \frac{1}{2}(y_{1,k} + y_{1,k-1}), \dots, \frac{1}{2}(y_{n,k} + y_{n,k-1}) \right] = 0 \quad (3)$$

他の近似式も考えられるが<sup>3)</sup>、通常はこの式が使われる<sup>2)</sup>。(1) の変数  $x$  は連続的に変化するが、これを  $x_k (k=1, 2, \dots, m)$  で近似する。(3) は各点において  $n$  個の解を与えるので、これらの方程式

---

<sup>\*</sup> 創価大学名誉教授

は全部で  $n \times m$  個の未知数を含んでいる。(3) は非線形の連立方程式であり、ニュートン法によって解を求める。 $n_1$  の初期条件と  $n_2 = n - n_1$  の終端条件を与えて、中間点では

$$E_{i,k} \equiv y_{i,k} - y_{i,k-1} - (x_k - x_{k-1}) f_i(x_k, x_{k-1}, y_{1,k}, y_{1,k-1}, y_{2,k}, y_{2,k-1}, \dots, y_{n,k}, y_{n,k-1}) = 0 \quad (4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n, k = 2, 3, \dots, m)$$

によって近似する。全部で  $(m-1)n$  の方程式があり、初期条件と終端条件が残りの方程式を与える。最初の境界点（初期条件）では

$$E_{0,i} \equiv B_i(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_1) \quad (5)$$

とする。最後の境界点（終端条件）では

$$E_{n+1,i} \equiv B_i(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m - n_2 + 1) \quad (6)$$

とおく。こうして (1), (2) を解く問題は (4)-(6) を満たす  $y_{i,k}$  を求める問題に変換されることになる。 $E_{i,k}$  を  $y_{i,k}^{(j)}$  と  $y_{i,k-1}^{(j)}$  のまわりでテイラー展開すると

$$E_{i,j} \cong E_{i,j}(y_{1,k}^{(j)}, y_{1,k-1}^{(j)}, \dots, y_{n,k}^{(j)}, y_{n,k-1}^{(j)}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial E_{i,j}}{\partial y_{l,k}} (y_{l,k} - y_{l,k}^{(j)}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial E_{i,j}}{\partial y_{l,k-1}} (y_{l,k-1} - y_{l,k-1}^{(j)}) \quad (7)$$

となる。 $E_{0,i}$  と  $E_{n+1,i}$  はつぎのように展開される。

$$E_{0,i} \cong E_{0,i}(y_{1,i}^{(j)}, \dots, y_{n,i}^{(j)}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial E_{0,i}}{\partial y_{l,i}} (y_{l,i} - y_{l,i}^{(j)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n_1) \quad (8)$$

$$E_{n+1,i} \cong E_{n+1,i}(y_{1,i}^{(j)}, \dots, y_{n,i}^{(j)}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial E_{n+1,i}}{\partial y_{l,i}} (y_{l,i} - y_{l,i}^{(j)}) \quad (i = 0, 1, \dots, m - n_2 + 1) \quad (9)$$

(7)-(9) の展開式をゼロとおき、 $y_{i,k}$  について解いて  $y_{i,k}^{(j+1)}$  とする。このような計算を収束するまで繰り返す。簡単なモデルであればヤコビ行列は正確に計算できるが、複雑なモデルでは数値微分で代用する。

## 2. ラムゼイモデル

つぎの標準的なラムゼイモデルに緩和法を適用してみよう。

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \quad (10)$$

$$k(0) = k_0, \quad k(\infty) = k^*$$

ここで  $k^*$  は定常状態の資本ストックを表す。最適消費と資本はつぎの式を満たす。

$$\dot{c} = c \times \left( \frac{\alpha k^{\alpha-1} - \delta - \rho}{\theta} \right) \quad (11)$$

$$\dot{k} = k^\alpha - c - \delta k$$

定常状態の資本と消費は

$$k^* = \left( \frac{\alpha}{\delta + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (12)$$

$$c^* = (k^*)^\alpha - \delta k^*$$

で与えられる。資本の初期値  $k(0)$  は与えられており、 $c(0)$  が特定の値をとる場合のみ定常状態へ収束する。しかしそのような消費の値を求めることは非常に難しい。ごくわずかな誤差でも資本と消費は時間とともに発散してしまう。緩和法では (11) 式をつぎの代数方程式で置き換える。

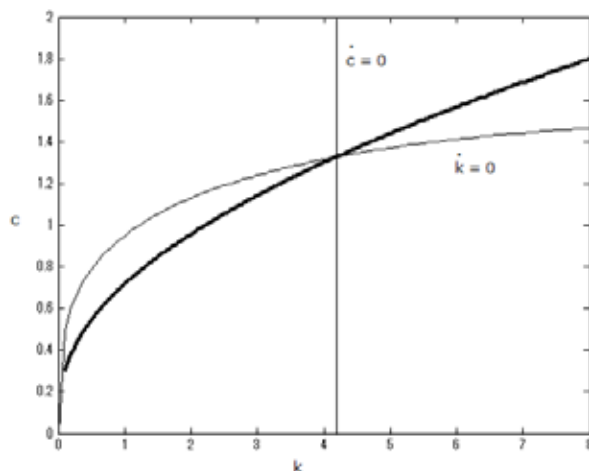
$$\frac{\Delta}{\theta} \times \left( \frac{c_k + c_{k-1}}{2} \right) \left[ \alpha \left( \frac{k_k + k_{k-1}}{2} \right)^{\alpha-1} - \delta - \rho \right] - (c_k - c_{k-1}) = 0 \quad (13)$$

$$\Delta \times \left[ \left( \frac{k_k + k_{k-1}}{2} \right)^\alpha - \frac{c_k + c_{k-1}}{2} - \delta \left( \frac{k_k + k_{k-1}}{2} \right) \right] - (k_k - k_{k-1}) = 0 \quad (14)$$

$$k_1 = k(0), \quad k_m = k^*$$

この式を満たす資本と消費の値をニュートン法で求めた。ただしヤコビ行列は数値微分で代用している。モデルのパラメータは  $\alpha = 0.3, \theta = 2, \rho = 0.06, \delta = 0.05$  とする。期間は  $0 \leq t \leq 100$  で資本ストックは 500 の分点で近似した。定常状態の資本と消費は  $k^* = 4.19, c^* = 1.33$  となる。(13) 式と (14) 式の資本と消費の解を組み合わせると鞍点経路（図1の太い曲線）が得られる。均衡点から左側のアームは  $k(0) = 0.1$  に対応し、右側のアームは  $k(0) = 8$  とした場合である。いずれの場合も資本と消費は時間とともに定常点へ収束する。(13),(14) 式は 1,000 個の未知数を含んでおり、収束解を与える初期値は簡単には見つからない。一般に多変数のニュートン法では初期値の設定が厄介な問題となる。

図1 資本と消費の経路



### 3. アイスナー・ストロッツモデル

アイスナー・ストロッツの投資モデルにおいて<sup>3)</sup>、企業は異時点間にわたる純利益の現在価値を最大化する。すなわち、

$$\max_I \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[ \pi(K) - I - \psi \left( \frac{I}{K} \right) I \right] dt \quad (15)$$

$$s.t. \quad \dot{K} = I, \quad K(0) = K_0$$

ここで  $K$  は資本ストック、 $I$  は投資、 $\pi(\cdot)$  は売上高、 $\psi(\cdot)$  は資本の調整費用を表す。最適投資の条件は

$$q = 1 + \psi \left( \frac{I}{K} \right) + \frac{I}{K} \psi' \left( \frac{I}{K} \right) \quad (16)$$

である。変数  $q$  はトービンの  $Q$  に相当する。数値計算では

$$\pi = K - 0.475K^2$$

$$\psi = 3 \left( \frac{I}{K} \right) + \left( \frac{I}{K} \right)^2$$

と仮定する。 $\rho = 0.05$  とすると、 $\pi'(K^*) = \rho$  から  $K^* = 1$  となる。また (16) の条件から

$$\dot{K} = \tau(q) \quad (17)$$

$$\tau(q) = \frac{-3 + \sqrt{6 + 3q}}{3}$$

が成り立つ。 $\tau'(q) > 0, \tau(1) = 0$ であり、投資は  $q > 1$  ならプラス、 $q < 1$  ならマイナス、 $q = 1$  ならゼロとなる。(16) から  $q$  の運動式は

$$\dot{q} = \rho q - \pi'(K) - \left(\frac{I}{K}\right)^2 \psi' \left(\frac{I}{K}\right) \tag{18}$$

で与えられる。横断性条件は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} q(t) K(t) = 0$$

である。上で仮定した関数の場合、(18) は

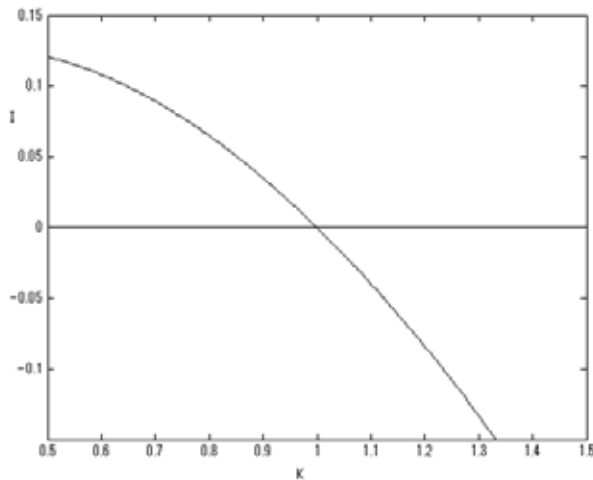
$$\dot{q} = \rho q - 1 + 0.95K - 3\tau(q)^2 - 2\tau(q)^3 \tag{19}$$

となる。結局、アイスナー・ストロツモデルは (17) と (19) の2つの式で表される。両式は  $K$  と  $q$  に関する微分方程式であり、緩和法によって数値解を求めた。図2は数値計算の結果に基づいて投資と資本ストックの関係を示している。資本が増加すれば投資は減少し、 $K < 1$  であれば投資はプラス、 $K > 1$  なら投資はマイナスとなる。このため資本ストックは  $K^* = 1$  へ収束して横断性条件は満たされる。図の曲線に資本の多項式を当てはめると、

$$I(K) = 0.05405 + 0.4272K - 0.7763K^2 + 0.4888K^3 - 0.2657K^4 + 0.08338K^5 - 0.01148K^6$$

となる。 $\pi(\cdot)$  と  $\psi(\cdot)$  について別の関数を仮定しても同じような結果が得られる。

図2 投資と資本ストックの関係



#### 4. 遅延微分方程式

独立変数  $x$  の関数  $y(x)$  に関するつぎの形の方程式を遅延微分方程式 (delay differential equation) という。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x), y(x-\tau)) \quad (20)$$

ここで  $\tau > 0$  は遅延、あるいは遅れ時間とよばれる。一般に

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x), y(x-\tau_1), y(x-\tau_2), \dots, y(x-\tau_n))$$

と複数の遅延が含まれる。さらに遅延時間が変化する場合もある。

遅延微分方程式は主に生態学や工学で使われるが、経済学でも景気循環の分野で重要な役割を果たしている。ここではカレッスキーの景気循環モデルとラグ付きラムゼイモデルを取り上げることにしよう。

Deeba 他 (2003) によると、カレッスキーモデルは

$$\dot{K}(t) = \left(\frac{a}{\tau} - n\right)K(t) - \left(\frac{a}{\tau} + m\right)K(t-\tau) - \varepsilon K^3(t) \quad (t \geq 0) \quad (21)$$

と表される。ここで  $K(t)$  は資本ストック、 $\tau$  は資本の懐妊期間であり、 $\varepsilon$  は資本の利潤抑制効果を表すパラメータである。この方程式の解を求めるには、通常の微分方程式の初期値に相当する履歴関数  $\varphi(t)$  を与える必要がある。履歴関数は一定の値をとり

$$\varphi(t) = 2 \quad (-\tau \leq t \leq 0) \quad (22)$$

とする。これを初期条件として、 $\tau$  の区間ごとに通常の微分方程式をつぎつぎに解いていく。

最初に  $0 \leq t \leq \tau$  のとき  $K(t-\tau) = 2$  であり、(21) は

$$\dot{K}(t) = \left(\frac{a}{\tau} - n\right)K(t) - 2\left(\frac{a}{\tau} + m\right) - \varepsilon K^3(t) \quad (0 \leq t \leq \tau) \quad (23)$$

となる。初期条件を  $K(0) = 2$  として解けば  $[0, \tau]$  の区間で解が得られる。

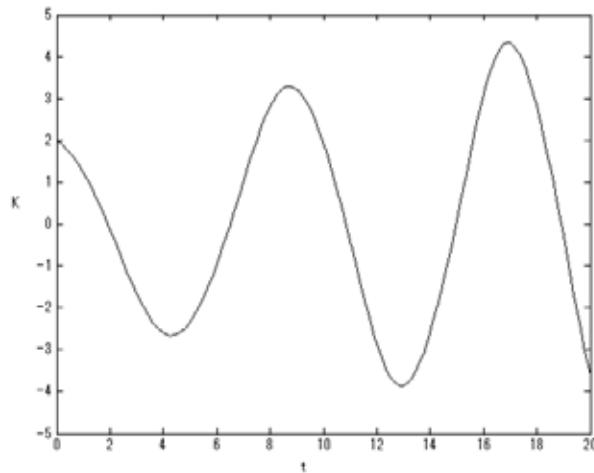
次にこうして得られた解を履歴関数として  $[\tau, 2\tau]$  の区間について (21) の解を求める。同様の方法で得た解をつなぎ合わせたものが全区間の解となる。

実際の計算では、(21) 式を

$$\dot{K}(t) = \alpha K(t) - \beta K(t-\tau) - \varepsilon K^3(t)$$

と表す。ただし  $\alpha = a/\tau - n$ ,  $\beta = a/\tau + m$  である。言うまでもなく、パラメータの値によって資本の経路は違って来る。遅延時間は  $\tau = 1$  であり  $\alpha = 0.95$ ,  $\beta = 1.15$ ,  $\varepsilon = 0.01$  とした。図3は資本ストックの動きを示している<sup>5)</sup>。資本ストックは  $K = 0$  のまわりで振幅を拡大しながら振動し、定常状態では  $-5.58 \leq K \leq 5.58$  の区間で振動を繰り返す。解の1次導関数は  $t = 0$  で不連続となる。この点では履歴関数の1次導関数が微分方程式を満たさないからである。不連続性は  $\tau$  の間隔で未来に伝播する。 $\varepsilon = 0$  であれば資本の利潤抑制効果がなくなり振幅は時間とともに拡大する。逆に、 $\alpha$  の値が小さいときは減衰して0に収束する。さらに、 $\alpha > \beta$  であれば  $\sqrt{(\alpha - \beta)/\varepsilon}$  に収束

図3 資本ストックの変動



する。このようにパラメータの値によって資本は様々な動きを示す。

次に Asea and Zak (1999) に倣ってラムゼイモデルに Kydland and Prescott (1982) の time to build を組み込んでみよう。ラムゼイモデルをつぎのように修正する。

$$\begin{aligned} & \max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) dt \\ & \text{s.t. } \dot{k}(t) = f(k(t-\tau)) - \delta k(t-\tau) - c(t) \\ & k(t) = \varphi(t) \quad (-\tau \leq t \leq 0) \end{aligned} \tag{24}$$

今期の生産に寄与するのは  $\tau$  期前の資本ストックである。効用最大化の条件は

$$\dot{c}(t) = \frac{u'(c(t))}{u''(c(t))} (\rho + \delta - f'(k(t-\tau))) \tag{25}$$

と表される。解析的な方法で解を求めるのは難しいので、区間接続法によって数値解を求めるこ

とにした。効用関数と生産関数は

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad f(k) = k^\alpha \quad (26)$$

とする。この場合、(25) は

$$\dot{c}(t) = c \left( \frac{\alpha k(t-\tau)^{\alpha-1} - \rho - \delta}{\theta} \right)$$

となる。遅延時間は  $\tau = 1$  であり、消費と資本の履歴関数は

$$\varphi_c(t) = \eta, \quad \varphi_k(t) = \lambda$$

とする。定常状態における資本と消費はラグのない場合と同じ値となり、先の (12) 式で与えられる。均衡解は鞍点経路となり、 $\eta$  と  $\lambda$  を適当に与えると解が得られる<sup>6)</sup>。遅延がない場合と同じパラメータを用いると、定常状態では  $k^* = 4.193$ ,  $c^* = 1.328$  となる。(25) 式は  $0 \leq t \leq 1$  では

$$\frac{\dot{c}}{c} = \psi, \quad \psi = \frac{\alpha \lambda^{\alpha-1} - \rho - \delta}{\theta}$$

となる。この方程式を初期条件  $c(0) = \eta$  のもとで解くと

$$c(t) = \eta e^{\psi t} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (27)$$

を得る。資本ストックはつぎの式を満たす。

$$\dot{k}(t) = \lambda^\alpha - \delta \lambda - \eta e^{\psi t}$$

両辺を時間で積分して、 $k(0) = \lambda$  を代入すると

$$k(t) = \lambda + (\lambda^\alpha - \delta \lambda)t + \frac{\eta}{\psi}(1 - e^{\psi t}) \quad (28)$$

となる。履歴関数の値を  $\lambda = 0.06$ ,  $\eta = 0.0995$  とすると、 $\psi = 1.020$  であり資本と消費は

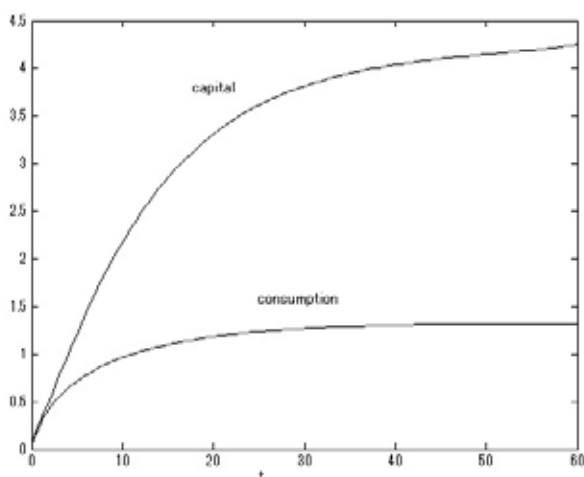
$$k(t) = 0.158 + 0.427t - 0.0975e^{1.020t} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$c(t) = 0.0995e^{1.020t}$$

で与えられる。このように  $0 \leq t \leq 1$  の区間では解析解が得られる。しかし、 $t \geq 1$  については解析解がないので緩和法で数値解を求めた。図 4 は  $0 \leq t \leq 60$  の区間でモデルの解を示している。明らかに資本ストックと消費は定常値へ収束している。先の図 1 と比較すると、time to build を考慮しても短期的な調整過程に目立った違いは見られない。ただし鞍点経路を求めるのは格段に難しくなる。遅延時間が極端に長くない限り、タイムラグのないラムゼイモデルを用いても大き



図4 資本ストックと消費の変動



な誤差は生じない。

### 5. グッドウィンモデル

最後に、Goodwin (1967) の循環的成長モデルを取り上げる。グッドウィンによると、経済成長に伴って雇用が拡大すれば労働需要の増加で賃金は上昇して労働分配率は高くなり投資と生産は減少する。その結果、労働需要は減少して賃金と労働分配率は低下する。すると投資は拡大して雇用は増加する。このため労働者の交渉力は高まり、賃金は上昇して労働分配率は再び高くなる。このようなプロセスを繰り返しながら経済は成長トレンドのまわりで変動する。

グッドウィンモデルはつぎの2つの微分方程式で表される<sup>7)</sup>。

$$\dot{e} = [\sigma(1 - \omega) - (\alpha + \beta)]e \tag{29}$$

$$\dot{\omega} = [\sigma\mu(\omega^* - \omega) + \rho(e - e^*) - \alpha]\omega \tag{30}$$

ただし  $e$  は雇用率で  $\omega$  は労働分配率である。また  $\sigma$  は産出・資本比率を表し、 $\alpha$  は平均労働生産性の上昇率、 $\beta$  は労働供給の増加率、 $\mu$  は価格調整係数、 $\rho$  はフィリップス曲線の調整係数、 $\omega^*$  は均衡労働分配率、 $e^*$  は自然失業率である。均衡点は  $E_0(0,0)$  と  $E_1(\omega_{ss}, e_{ss})$  の2つあるが、経済的に意味があるのは  $E_1$  である。ただし

$$\omega_{ss} = \frac{1}{\sigma}[\sigma - (\alpha + \beta)] \tag{31}$$

$$e_{ss} = \frac{\sigma\mu}{\rho} \omega_{ss} + \frac{1}{\rho} (\rho e^* - \sigma\mu\omega^* + \alpha) \quad (32)$$

モデルの動学的性質を調べるために、(29) と (30) 式を均衡点のまわりで線形化すると、ヤコビ行列は

$$J(\omega_{ss}, e_{ss}) = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma e_{ss} \\ \rho\omega_{ss} & -\sigma\mu\omega_{ss} \end{bmatrix}$$

となる。 $J$ の固有方程式は

$$\lambda^2 + \lambda\sigma\mu\omega_{ss} + \sigma\rho e_{ss}\omega_{ss} = 0$$

であり固有値は

$$\lambda = \frac{-\sigma\mu\omega_{ss} \pm \sqrt{(\sigma\mu\omega_{ss})^2 - 4\sigma\rho e_{ss}\omega_{ss}}}{2}$$

となる。 $(\sigma\mu\omega_{ss})^2 - 4\sigma\rho e_{ss}\omega_{ss} < 0$ であれば、均衡点は渦状点となる。(29),(30) は非線形の微分方程式であり、線形化方程式では均衡点の近傍の動きしかわからない。大域的な動きを見るには方程式を解く必要がある。このため緩和法を適用して数値解を求めることにした。計算に当たってパラメータは $\sigma = 0.4, \mu = 0.3, \alpha = 0.1, \beta = 0.03, \rho = 0.2, \omega^* = 0.7, e^* = 0.08$ とする。(31),(32) から求めた定常値は $\omega_{ss} = 0.675, e_{ss} = 0.565$ である。数値計算では(29),(30) 式をつぎの代数方程式で近似する。

$$[\sigma(1 - \omega_i) - (\alpha + \beta)]e_i - (e_{i+1} - e_i) / \Delta = 0$$

$$[\sigma\mu(\omega^* - \omega_i) + \rho(e_i - e^*) - \alpha]\omega_i - (\omega_{i+1} - \omega_i) / \Delta = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\omega_1 - 0.5 = 0 \quad (33)$$

$$e_1 - 0.4 = 0$$

最後の2つの式は初期条件である。 $n = 400$ で、期間は $0 \leq t \leq 120$ とした。図5は方程式の誤差が減少する様子を示している。(33) は比較的簡単な式であり、少数回反復するだけで解が得られる。もちろん初期値関数によって反復回数は違ってくる。労働分配率と雇用率はらせん状に均衡点へ収束する(図6)。分配率と雇用率の初期値を0.5, 0.4としているが、他の値でも同じ点に収束する。何らかの理由で経済が成長トレンドから外れても、雇用と所得分配は速やかに元の状態へ戻る。したがってモデルの経済は動学的に安定している。

図5 方程式の誤差

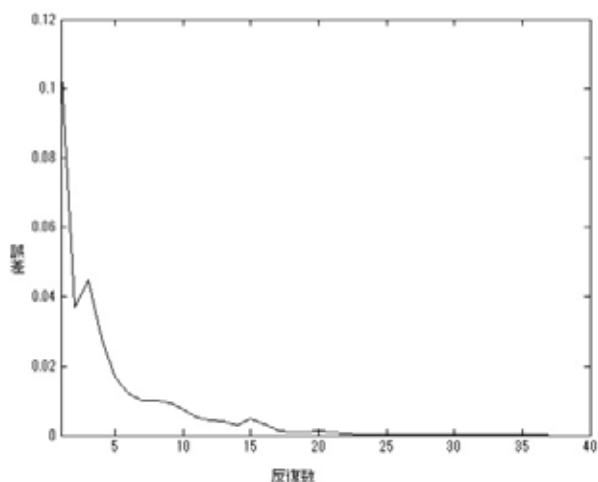
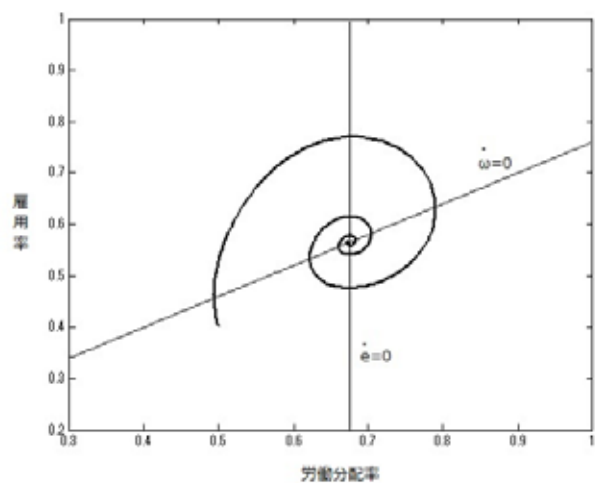


図6 労働分配率と雇用率の変動



## 6. 結語

これまで緩和法は主として連立1次方程式、とくに偏微分方程式の差分近似で現れる線形方程式に適用されてきた。ここでは常微分方程式を代数方程式で置き換えて非線形連立方程式から解を求める方法について検討した。この方法の利点は初期条件や終端条件を簡単に考慮できることである。ルンゲ・クッタ法など従来の方法を用いると煩雑な計算が必要である。また状態変数と制御変数の経路が分かれば、時間を消去することで動的計画法の政策関数を得ることができる。緩和法には初期値の設定がむずかしいという難点がある。とくに最適解が鞍点経路となる場合は適当な初期値を見つけることは簡単ではない。これは今後検討すべき課題である。

## 注

- 1) Press 他 (2007) は緩和法の基本的な文献である。釜 (2021) は緩和法を簡単な経済モデルに適用した例を示している。
- 2) 異なる2つの値の平均をとる代わりに1つの値だけでもかまわない。この場合、(3) 式は

$$y_{i,k} - y_{i,k-1} - (x_k - x_{k-1})f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}) = 0$$

と簡単になる。

- 3) Robert Eisner and Robert H. Strotz, “Determinants of Business Investment,” in *Impacts of Monetary Policy*, Commission on Money and Credit, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963, pp.59-337.
- 4) 区間接続法については三井、小藤、齋藤 (2004) の第3章が参考になる。
- 5) 変数  $K$  は資本ストックの成長トレンドからの乖離を表し、プラスやマイナスとなる。
- 6) 消費と資本ストックが一定であれば、 $\eta = \lambda^\alpha - \delta\lambda$  という条件を課すことが考えられる。しかしこの条件を課すと安定解は得られない。
- 7) 詳しくは元木 (1982) を参照せよ。

## 参考文献

- 釜国男 (2021) 『計算経済学』日本評論社。
- 三井斌友、小藤俊幸、齋藤善弘 (2004) 『微分方程式による計算科学入門』共立出版。
- 元木久 (1982) 「循環的成長論の検討：Goodwin モデルについて」『関西大学経済学論集』第32巻1号、17-46頁。
- Asea P., and P. Zak. (1999) “Time to Build Model and Cycles”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.23(8), pp.1155-1175.
- Deeba, E., G. Dibeh, S. Khurl and S. Xie. (2003) “Decomposition Method for Solving a Nonlinear Business Cycle Model”, *ANZIAMJ*, Vol.45, pp.295-302.
- Goodwin, B. R. (1967) “A Growth Cycle,” in C. H. Feinstein (ed.) *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Cambridge University Press, pp.54-58.
- Kalecki, M. (1935) “A Macrodynamics Theory of Business Cycles”, *Econometrica*, Vol.3, pp.327-344.
- Kydland, F. E., and E. C. Prescott. (1982) “Time-to-build and Aggregate Fluctuations”, *Econometrica*, Vol.50(6), pp.1345-1370.
- Mulligan, C. B and X. Sala-i-Martin. (1991) “A Note on the Time-Elimination Method for Solving Recursive Dynamic Economic Models”, *NBER Technical Working Paper*, No.116.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery. (2007) *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing 3rd. ed.*, Cambridge University Press.