

創価経済論集

季刊

THE SOKA ECONOMIC STUDIES: VOL. LII NO. 1·2·3·4/MARCH 2023

論文

- 資産価格と世代重複（計算経済学の研究 その23）…………… 釜 国 男 （1）
- 緩和法による経済モデルの数値解法（計算経済学の研究 その24）…… 釜 国 男 （15）
- ロシアのウクライナ侵攻が小麦の国際価格に及ぼす影響について
…………… 齋藤 之美・齋藤 勝宏 （27）

The Soka Economic Association

President

Isao TAKAGI

Editors

Takehiro USUI

Nobuyuki KANAZAWA

Makoto MASUI

Kazuyuki TERADA

Takeshi OJIMA

The Soka Economic Association, affiliated to the Department of Economics, Soka University, was established in 1971. The purpose of the Association is to support and encourage research and education in Economics, Economic History, Economic Policy, Statistics, and closely related problems. The Soka Economic Studies has been published quarterly by the Association with papers mainly contributed by the faculty members of the Department. All communications relating to subscriptions and memberships should be addressed to :

The Soka Economic Association, Soka University

1-236 Tangi-machi, Hachioji, Tokyo 192-8577

資産価格と世代重複 (計算経済学の研究その23)

Asset Pricing and Overlapping Generations

釜 国男*
Kunio KAMA

土地や株式などの資産取引に参加するのは特定の年齢層に限られる。このことから分かるように、資産取引には年齢が関係してくる。ライフサイクルステージに応じてある年齢の世代は資産を購入し、別の世代は資産を売却する。資産価格の研究においてこれまで無視されてきた論点である。Lucas (1978) に代表される資産価格の理論では、無限の計画期間をもつ消費者を想定する。これによってモデルは単純化されるが、これはきわめて非現実的な仮定であることは否定できない。寿命に限りがあり計画期間が有限である場合、資産価格はどのように決定されるのであろうか。本稿では世代重複モデル (Overlapping Generations Model) を用いてこの問題について考える¹⁾。OLG モデルは複雑な構造をしており、解析的な方法で解を求めることは難しい。代わりに数値計算を行って資産価格を求める。ただし標準的なモデルと異なり、異質的な消費者を仮定する。つまり同一世代に属する消費者は資産や配当の面で多様性がある。現実の資産市場でも様々な個人や企業が取引を行っている。参加者の異質性を認めると所得や資産の分配が重要な意味をもってくる。例えば、なんらかの理由で所得分配が変わると経済全体の消費支出が増加したり減少したりするかもしれない。また所得分配のあり方によって公的年金の経済効果も異なる可能性が高い。これまで行われた OLG の実証研究の多くは離散時間のモデルに基づいている。離散時間にすれば理解しやすい上に年次データしか利用できないからである。しかし数値計算を行うには連続時間モデルのほうが都合がよい。計算が簡単で既存のコンピュータプログラムを利用できるからである。しかも世代数を増やしても計算時間はあまり変わらない。こうした理由から連続時間のモデルを用いることにした。最初に交換経済における資産価格について検討する。消費者は配当の一部を消費して残りは資産の購入にあてる。交換経済では資産価格は需要側の要因だけで決まる。次に生産活動を含むようにモデルを拡張する。この場合、消費者は自らの労働と資本を用いて生産活動を行う。最後に労働時間が変化する場合について議論する。

* 創価大学名誉教授

1. モデルの構造

世代重複モデルを用いて資産価格の決定について考察する。どの世代も同じ人口を擁し全世界の人口は1とする。消費者のある年における年齢を t 、資産を k_t 、配当を z_t 、消費を c_t とし、 T 年間だけ生存する。それぞれの消費者は予算制約のもとで生涯の期待効用を最大化する。

$$\max_{\{c_t\} \geq 0} E_0 \left[\int_0^T e^{-\rho t} u(c_t) dt + e^{-\rho T} \phi(k_T) \right] \quad (1)$$

$$s.t. \quad \dot{k}_t = \frac{k_t z_t - c_t}{p_t}, \quad k_t \geq 0, \quad \phi(k_T) \geq 0$$

ここで p_t は消費財で表した資産価格である。配当はつぎの拡散過程に従うものとする。

$$dz_t = \theta(\mu - z_t)dt + \sigma dW_t, \quad z_t \in [z_1, z_2] \quad (2)$$

動的計画法を適用すると、HJB 方程式は

$$\rho V(k, z, t) = \max_c \left\{ u(c) + V_k(k, z, t)((kz - c)/p) + V_z(\theta(\mu - z)) + \frac{\sigma^2}{2} V_{zz}(k, z, t) + V_t(k, z, t) \right\} \quad (3)$$

と表される。 $V(k, z, t)$ は t 歳のときの value function である。最適消費の条件は

$$u'(c) = \frac{V_k(k, z, t)}{p} \quad (4)$$

となる。これより消費は資産、配当、および年齢によって決まり、関数 $c(k, z, t)$ で表すことにする。貯蓄は

$$s(k, z, t) = \frac{kz - c(k, z, t)}{p} \quad (5)$$

で与えられる。数値計算では資産の範囲を $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ とする。このため

$$k_{\min} z - c(k_{\min}, z, t) \geq 0$$

$$k_{\max} z - c(k_{\max}, z, t) \leq 0$$

という条件を課す。等号で成り立つとすると、(4) から

$$c(k_{\min}, z, t) = (u')^{-1}(V_k(k_{\min}, z, t)/p) \quad (6)$$

$$c(k_{\max}, z, t) = (u')^{-1}(V_k(k_{\max}, z, t)/p)$$

となる。

年齢が t 歳である世代の資産と配当の分布を $g(k, z, t)$ と表す。これはつぎのコルモゴロフ方程式を満たす。

$$g_t(k, z, t) = -\partial_k(s(k, z, t)g(k, z, t)) - \partial_z(\theta(\mu - z)g(k, z, t)) + \frac{\sigma^2}{2} g_{zz}(k, z, t) \quad (7)$$

また規格化の条件

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_0^{\infty} g(k, z, t) dk dz = 1 \quad (8)$$

も満たさなければならない。最初と最後の世代については

$$g(k, z, 0) = g(k, z, T) \quad (9)$$

が成り立つと仮定する。つまり遺産相続により第0世代と第 T 世代の状態変数の分布は等しくなる。

世代全体の資産は

$$K(t) = \frac{1}{T} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{\infty} kg(k, z, t) dk dz \quad (10)$$

で与えられる。資産価格は貯蓄を通じて資産と配当の分布を変化させる。このため $K(t)$ は資産価格の関数となり、全世代の資産

$$D(p) = \int_0^T K(t) dt$$

も資産価格の関数となる。資産の供給は1に固定されており、資産市場の均衡条件は

$$D(p) = 1 \quad (11)$$

である。 $D(p)$ は p の減少関数であり、均衡価格は1つだけ存在する²⁾。

競争均衡解を解析的な方法で求めることは難しい。このため数値計算によって近似解を求めた。有限要素法や有限差分法、有限体積法、スペクトル法などいろいろな方法があるが、ここでは有限差分法を用いることにした。最初に HJB 方程式の数値解法について簡単に説明しよう³⁾。資産と配当を $k_i, i = 1, \dots, I$ と $z_j, j = 1, \dots, J$ で離散化し、年齢は $t_h, h = 1, \dots, N$ で近似する。 $V(k_i, z_j, t_h)$ の近似値を $V_{i,j,h}$ とする。 $V_{i,j,h}$ の初期値を設定して収束条件を満たすまでつぎの式を繰り返し計算する。

$$\frac{V_{i,j,h}^{n+1} - V_{i,j,h}^n}{\Delta} + \rho V_{i,j,h}^{n+1} = u(c_{i,j,h}^n) + \partial_k V_{i,j,h}^{n+1} ((k_i z_j - c_{i,j,h}^n) / p) + \partial_z V_{i,j,h}^{n+1} (\theta(\mu - z_j)) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{zz} V_{i,j,h}^{n+1} + \frac{V_{i,j,h}^{n+1} - V_{i,j,h}^n}{\Delta t} \quad (12)$$

この式は行列を用いて

$$\rho V^n = u^{n+1} + A^{n+1} V^n + \frac{1}{\Delta t} (V^{n+1} - V^n) \quad (13)$$

と書き表される。ここで A^{n+1} は離散化した k_t と z_t の遷移行列であり、 V^n は $V_{i,j,h}^n$ を要素とするベクトルである。これは1階の差分方程式であり、 $\phi(k_T)$ を初期条件として時間を逆向きにして解く。大規模な行列計算が必要であるが、スパース行列の性質を利用すれば効率的に計算することができる。

つぎに t_h 世代の資産と配当の分布を $g_{i,j}^h$ で近似すると

$$\frac{g^{h+1} - g^h}{\Delta t} = (A^h)^T g^{h+1}$$

が成り立つ。これより

$$g^{h+1} = (I - \Delta t (A^h)^T)^{-1} g^h \quad (14)$$

となる。こんどは、 $g_{i,j}^0 = g(k_i, z_j, 0)$ を初期値として時間を正の方向に進めて $g_{i,j}^h$ を求める。

競争均衡は (3)、(7)、(11) 式を満たす $V(k, z, t)$, $g(k, z, t)$ および p によって定義される。数値計算のポイントは (11) を満たす資産価格を求めることである。数値計算ではつぎの効用関数を用いた⁴⁾。

$$u(c) = -\frac{1}{c}$$

$$\phi(k_T) = 0.3 \log(0.001 + k_T) \quad (15)$$

この場合、最適消費は

$$c = \left[\frac{V_k(k, z, t)}{p} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

となる。これより資産価格が上昇すると消費は増加することが分かる。

つぎの手順で数値解を求めた。

[ステップ1] 資産価格の初期値 $p = p^0$ と第0世代の資産と所得の分布を与える。

[ステップ2] (13) と (14) 式から $V_{i,j,h}^n$ と $g_{i,j,h}^n$ を計算する。

[ステップ3] 総資産

$$D^{new} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J k_i g_{i,j}^n \Delta t \Delta k \Delta z$$

を求めて $|D^{new} - 1| \leq \varepsilon$ であれば終了する。そうでなければ

$$p^{new} = p + 0.35 \times (D^{new} - 1)$$

により価格を更新してステップ2へ戻る。

初期値をうまく選ぶと少数回反復しただけで収束し、世代数を増やしても計算時間はあまり変わらない。

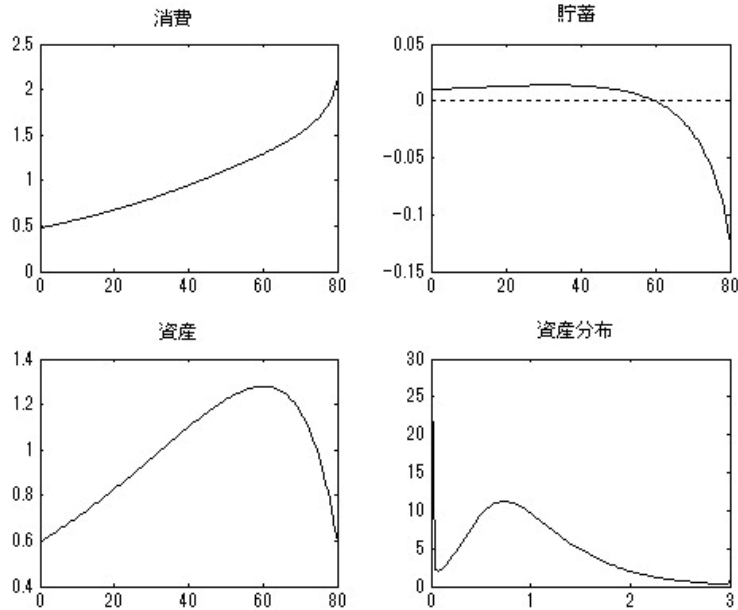
2. 計算結果

消費者の生存期間は $T = 80$ であり、各世代の人口は $1/80$ である。モデルのパラメータは $\rho = 0.05, \theta = 0.6, \mu = 1, \sigma = 0.3$ とする。資産と配当は $0.01 \leq k \leq 3, 0.01 \leq z \leq 1.99$ の区間に 100 と 30 の分点をとる。 $\Delta t = 0.5$ であり、全部で 160 世代が重複している。 $\mu = 1$ より経済全体では消費と配当は 1 に等しくなる。Matlab で前節のアルゴリズムを実行すると、均衡価格は $p^* = 12.166$ となる。図1は主要な集計量と資産の分布を示している。3つのグラフは世代ごとに集計した消費、貯蓄と資産である。たとえば第 t 世代の消費 $C(t)$ は

$$C(t) = \frac{1}{T} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{\infty} c(k, z, t) g(k, z, t) dk dz$$

で与えられる。消費は年齢とともに増加し、70歳頃から急増する。各世代の人口は等しいので高齢者ほど多く消費することがわかる。貯蓄は60歳まではプラスで、それ以降はマイナスとなる。高齢者と若年者の間で資産が取引され、高齢者は資産を売却して消費を増やしている。これは消費のライフサイクル理論と整合的な行動パターンである。下段には30歳の世代について資産分布を示している。資産分布は山型をしており、一部のメンバーはほとんど資産をもっていない。他の世代でも同じような形の分布となる。配当の増加は資産価格を押し上げると予想される。そこで $\mu = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0$ として計算すると、資産価格 $p = 12.166, 17.556, 23.013, 28.597, 34.897, 39.709, 41.184$ となる。予想通り資産価格は配当の増加関数となる。また消費者の主観的割引率も資産価格に強く影響する。割引率が $\rho = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12, 0.14$ と高くなると、資産価格は $p = 16.398, 13.075, 11.017, 9.372, 8.109, 7.117, 6.376$ と低くなる。これは割引率が高くなると消費の増加で資産の需要が減少するからである。

図1 世代別の集計値と資産分布



3. 生産活動を含む場合

これまで検討したのは交換経済における資産価格の決定である。次に生産活動を含むようにモデルを拡張しよう。消費者は資本と労働を用いて財を生産する。生産量は $y = Ak^\alpha z^{1-\alpha}$ で与えられる。 A は全要素生産性で z は労働効率を表す。式の意味は異なるが、 z は先の (2) と同じ式に従うものとする。生産した財の一部は消費して残りは資産の購入にあてる。 $y = c + pi$ (i は投資) から

$$\dot{k} = \frac{Ak^\alpha z^{1-\alpha} - c}{p}$$

となる。前節の HJB 方程式をつぎのように修正する。

$$\rho V(k, z, t) = \max_c \left\{ u(c) + V_k(k, z, t) \frac{(Ak^\alpha z^{1-\alpha} - c)}{p} + V_z(\theta(\mu - z)) + \frac{\sigma^2}{2} V_{zz}(k, z, t) + V_i(k, z, t) \right\} \quad (16)$$

最適消費の条件は変わらない。貯蓄がゼロとなる $k = k_{\min}, k_{\max}$ では

$$V_k(k_{\min}, z, t) = p(Ak_{\min}^\alpha z^{1-\alpha})^{-2}$$

$$V_k(k_{\max}, z, t) = p(Ak_{\max}^\alpha z^{1-\alpha})^{-2}$$

が成り立つ。資産市場の均衡条件は

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_{z_1}^{z_2} \int_0^\infty kg(k, z, t) dk dz dt = 1 \tag{17}$$

である。左辺は資産価格の減少関数であり、唯一の均衡解が存在する。つぎの手順で資産価格を求めた。

[ステップ1] 資産と配当分布の初期値を $g^0 = 1/(3000 \times \Delta k \times \Delta z)$, 価格を $p^0 = 6$ とする。

[ステップ2] $V_{terminal} = 0.3 \log(0.001 + k)$ を初期値として、年齢を逆向きに各世代の value function を求める。

[ステップ3] g^0 を初期条件として、年齢順に $g(k, z, t)$ を計算して資産需要 D を求める。

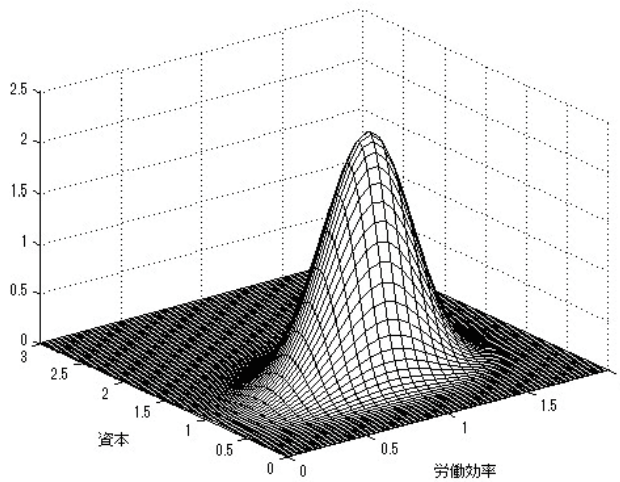
$|D-1| \leq \varepsilon$ であれば終了する。そうでなければ

$$p^{new} = p + 0.9 \times (D - 1)$$

により価格を更新してステップ2へ戻る。

パラメータの値は前節と変わらない。ただし生産関数のパラメータは $A = 1, \alpha = 0.4$ とした。上のアルゴリズムを実行すると、資産価格は $p^* = 5.637$ となる。交換経済の場合と比べて価格は大幅に低下する。これは資産の需要が減少したことによる。世代ごとの集計値は先の図1とほとんど変わらない。図2は30歳となる世代の資本と労働効率の分布を示している。図1では一部のメンバーはほとんど資産を持たないが、生産活動が行われるとすべてのメンバーが資産を持つようになる。他の世代でも同じような形の分布となる。

図2 資本と労働効率の分布

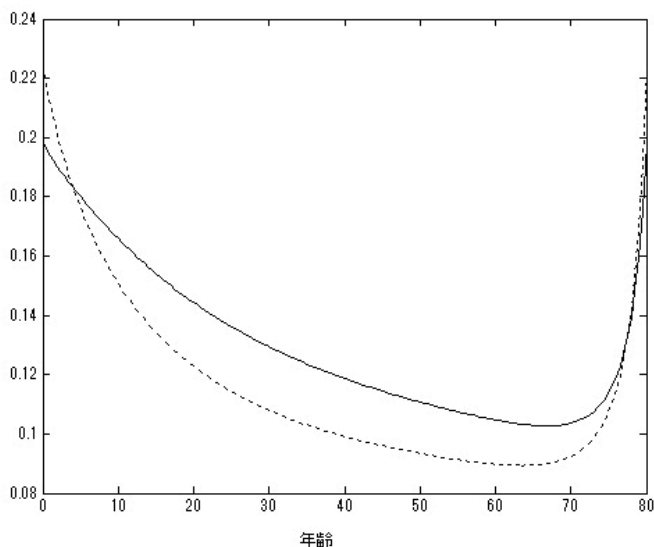


次に政府の分配政策を導入しよう。政府は τ の税率で所得に課税し、同時に b の給付を支給する。税率を $\tau = b/\text{総所得}$ とすれば収支はバランスする。この場合、貯蓄は

$$\dot{k} = \frac{(1-\tau)Ak^\alpha z^{1-\alpha} + b - c}{p}$$

となる。給付を $b = 0.3$ とすると、資産価格は $p^* = 4.126$ 、所得税率は $\tau = 30.61\%$ となる。図3は

図3 資産のジニ係数



課税前の資産のジニ係数（実線）と課税後の係数（点線）を比較している。図から明らかなように、大半の世代でジニ係数は低くなり資産格差は縮小する。しかし、もともと資産格差は顕著でなかったので政策効果は限定的である。

表1は給付水準を変えたときの集計量を示している。給付が増えるにつれて資産価格は低下する。これは資産需要の減少を反映している。給付に見合って所得税率は5.10%から50.93%へ引き上げられる。資産のジニ係数は若干低下する⁵⁾。各世代の効用を集計して社会的効用をつぎのように定義する。

$$U_{social} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{z_1}^{z_2} \int_0^\infty u(a, z, t) g(a, z, t) da dz dt$$

計算結果によると、給付を増やすと社会的効用は改善する。したがって社会的効用を高める1つの方法は税金と給付をセットで増やすことである。

表1 給付と集計量の関係(1)

給付	資産価格	消費	税率(%)	ジニ係数	社会的効用
0.05	5.375	0.991	5.10	0.130	-1.532
0.10	5.123	0.991	10.21	0.128	-1.503
0.15	4.874	0.991	15.31	0.125	-1.478
0.20	4.626	0.991	20.41	0.123	-1.454
0.25	4.377	0.991	25.51	0.120	-1.432
0.30	4.126	0.991	30.61	0.117	-1.412
0.35	3.871	0.991	35.70	0.114	-1.393
0.40	3.614	0.991	40.78	0.110	-1.375
0.45	3.355	0.991	45.82	0.107	-1.359
0.50	3.085	0.991	50.93	0.103	-1.047

4. 労働時間の変化

最後に、これまで一定としてきた労働時間が変化する場合について検討しよう。効用関数をつぎのように変更する。

$$u(c, l) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{l^{1+\varphi}}{1+\varphi} \quad (\varphi > 0) \tag{18}$$

ここで l は労働時間を表す。生産量は $y = Ak^\alpha(zl)^{1-\alpha}$ で与えられる。消費者は生涯の効用が最大となるように消費と労働時間を決定する。動的計画法を適用すると、HJB 方程式は

$$\rho V(k, z, t) = \max_{c, l} \left\{ u(c, l) + V_k(k, z, t) \left((Ak^\alpha(zl)^{1-\alpha} - c) / p \right) + V_z(\theta(\mu - z)) + \frac{\sigma^2}{2} V_{zz}(k, z) + V_t(k, z, t) \right\} \tag{19}$$

と表される。最適消費と労働時間は

$$u_c = \frac{V_k(k, z)}{p}$$

$$-u_l = (1-\alpha) \frac{V_k(k, z)}{p} Az^{1-\alpha} \left(\frac{k}{l} \right)^\alpha \tag{20}$$

を満たす。これより消費と労働時間は

$$c = \left[\frac{V_k(k, z)}{p} \right]^{-\frac{1}{\gamma}}$$

$$l = \left[(1-\alpha) \frac{V_k(k, z)}{p} A k^\alpha z^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha+\varphi}} \quad (21)$$

で与えられる。資産価格が上昇すると、消費は増加して労働時間は短くなる。資本の下限と上限では貯蓄はゼロでなければならない。下限での労働時間と消費は

$$l = \left[(1-\alpha) (A k_{\min}^\alpha z^{1-\alpha})^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{\alpha+\varphi+(1-\alpha)\gamma}} \quad (22)$$

$$c = A k_{\min}^\alpha (lz)^{1-\alpha}$$

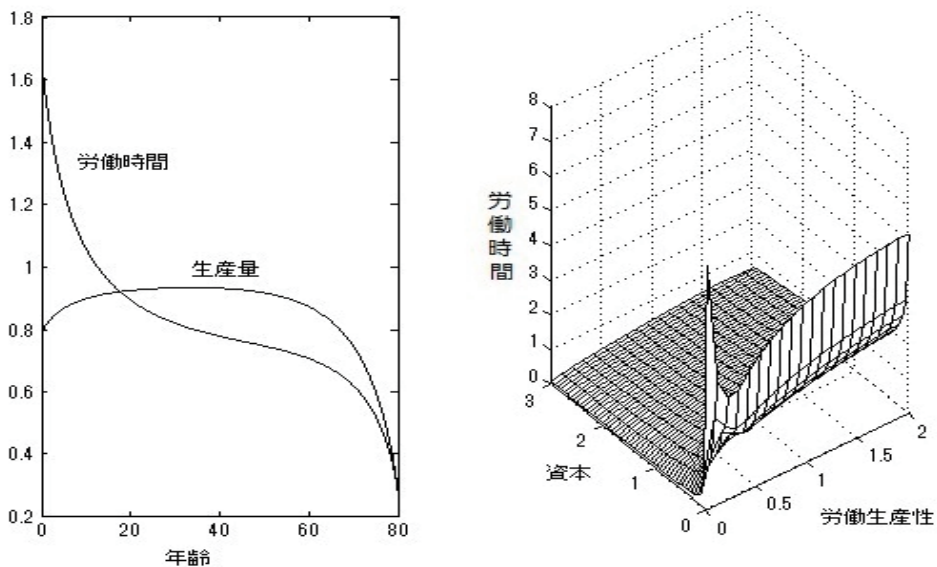
となる。上限では $k = k_{\max}$ とする。労働時間のパラメータは $\varphi = 0.5$ で、他のパラメータの値は前節と変わらない。図4は前節のアルゴリズムを適用した結果である。左の図は各世代の生産量 $Y(t)$ と労働時間 $L(t)$ を示している。ただし

$$Y(t) = \frac{1}{T} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^\infty A k^\alpha (z l)^{1-\alpha} g(k, z, t) dk dz$$

$$L(t) = \frac{1}{T} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^\infty l(k, z, t) g(k, z, t) dk dz$$

である。計算結果によると、年齢とともに労働時間は短くなる。しかし50歳になる頃まで資本は増加するので生産量は減少しない。右側の図は50歳のときの労働時間である。労働時間は生産性が高くなると長くなり、資本が増えると短くなる。他の年齢でも同様の関係がみられる。資

図4 生産量と労働時間



産価格は $p^* = 5.583$ であり、総消費は $C^* = 0.867$ 、総労働時間は $L^* = 0.821$ となる。総労働時間は短くなり、 $l = 1$ の場合と比べて総消費は減少する。なお、 $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ というマクロの生産関数を想定して $K = 1, L = 0.821$ を代入すると、 $Y = 0.888$ となる。 $Y(t)$ を全世界で合計すると 0.856 となり一致しない。マクロの生産関数は生産要素の分布を無視しているため食い違いが生じる。

全要素生産性が $A = 1.3$ に上昇すると、経済パフォーマンスは改善する。つまり資産価格は $p^* = 6.740$ と高くなり、総消費は $C^* = 1.046$ 、総労働時間 $L^* = 0.724$ となる。消費は拡大して労働時間は短くなり経済状況は好転する。

次に所得税を徴収して一定の給付を行う政策が導入されたとする。この場合、予算制約は

$$\dot{k} = \frac{(1-\tau)Ak^\alpha(zl)^{1-\alpha} + b - c}{p}$$

となる。ここで τ は税率を表し b は給付である。HJB 方程式は

$$\rho V(k, z, t) = \max_{c, l} \left\{ u(c, l) + V_k(k, z, t) \left((1-\tau)Ak^\alpha(zl)^{1-\alpha} + b - c \right) / p + V_z(\theta(\mu - z)) + \frac{\sigma^2}{2} V_{zz}(k, z) + V_t(k, z, t) \right\} \quad (23)$$

となる。効用最大化の条件は (20) 式で与えられる。ここで問題となるのは資本の下限と上限における労働時間と消費である。所得税がないときは (22) 式で与えられるが、所得税があるときは次式から求める。

$$l = [(1-\alpha)((1-\tau)Ak_{\min}^\alpha z^{1-\alpha} l^{1-\alpha} + b)^{-\gamma} Ak_{\min}^\alpha z^{1-\alpha}]^{\frac{1}{\alpha+\varphi}}$$

$$c = (1-\tau)Ak_{\min}^\alpha (zl)^{1-\alpha} + b \quad (24)$$

労働時間は最初の式の両辺に含まれている。このため二分法によって労働時間を求めた。上限の場合は $k = k_{\max}$ とする。経済全体の生産量を Y とすると、収支均衡条件は $\tau = b/Y$ である。

給付額を $b = 0.3$ とすると、資産価格は $p^* = 4.209$ となる。総消費は $C^* = 0.871$ であり、総労働時間は $L^* = 0.815$ に増える。また所得税率は $\tau = 34.9\%$ となる。全要素生産性はマクロ経済に強い影響を及ぼす。全要素生産性が $A = 1.3$ になると、 $p^* = 6.069, C^* = 1.048, L^* = 0.721, \tau = 29.0\%$ となる。資産価格は上昇して税率は低くなる。給付は据えおいたまま課税所得が増えるので、税率を引き下げることができる。表2は給付と集計量の関係を示している。ただし全要素生産性は $A = 1.3$ としている。給付が引き上げられると、資産需要の減少で資産価格は低下する。消費には目立った違いは見られない。総労働時間もほとんど変わらない。ただし年齢が高くなるほど労働時間は短くなる。給付の引き上げに伴って税率はほぼ2倍となる。経済全体では資産のジニ係数は低く、資産格差はほとんど存在しない。ただし若年世代と老齢世代の資産格差は無視できないほど大きい。最後の欄は社会的効用である。給付が増えるにつれて社会的効用はわずかながら高くなる。世代ごとにみると、年齢とともに消費は増加し労働時間は短くなる。このため若年者に比べて高齢者の効用は高い。この場合も増税して給付を増やすと社会的効用は改善する。

表2 給付と集計量の関係(2)

給付	資産価格	消費	労働時間	税率(%)	ジニ係数	社会的効用
0.20	6.351	1.050	0.725	19.31	0.118	- 1.433
0.25	6.226	1.050	0.724	24.14	0.117	- 1.431
0.30	6.082	1.049	0.722	28.98	0.116	- 1.429
0.35	5.337	1.062	0.722	33.35	0.088	- 1.411
0.40	4.356	1.054	0.721	38.50	0.089	- 1.410

5. 結語

Lucas (1978) に代表される従来の資産価格モデルを2つの点で修正した。1つは代表的消費者に代えて異質的消費者を仮定したことである。これによって資産分布と資産価格の関係を調べることができるようになる。政府の経済政策は資産価格に直接影響するだけでなく資産分布を通じて間接的にも影響する。これはルーカスのモデルでは見過ごされた論点である。もう1点は世代重複のアイデアを取り入れたことである。消費者はライフサイクルステージの初期段階で貯蓄を行い、後期になると貯蓄をとり崩す。したがって若年世代は老齢世代から資産を購入することになる。少子高齢化のように世代間の人口バランスが崩れると資産市場にも影響が及ぶ。海外取引を無視すれば少子高齢化は資産価格の下落をもたらす可能性が高い。ルーカスモデルに関して Mehra and Prescott (1985) はデータとの適合性に疑問を呈している。つまりモデルから示唆される株式のリスク・プレミアムの理論値と実際値との間に大きなギャップが存在する。これはメーラ・プレスコットのパズルとよばれている。このパズルを解くために様々な考えが提示されている。たとえば釜 (2021) は無限の計画期間をもつ消費者を仮定した場合について論じている。現実には年齢を含めて多様な人びとが資産取引を行っている。異質的世代重複モデルはこうした現実を反映したモデルである。本稿では安全資産収益率パズルとの関係は論じなかったが、これは今後に残された1つの課題である。

注

- 1) Storesletten 他 (2007) や Salyer (1988) も OLG モデルで資産価格について論じている。
- 2) 資産の供給量は1以外の適当な正の値でもかまわない。ただし供給量が多くなると資産価格は低くなる。
- 3) 詳しくは Achdou 他 (2017) や釜 (2018) を参照せよ。
- 4) 他の CRRA 効用関数では数値が変わるだけで定性的な結果は変わらない。
- 5) 表の数値は各世代のジニ係数の平均値である。

参考文献

- 釜国男 (2018) 『コンピューテーショナル・エコノミクス』 多賀出版。
 —— (2021) 『計算経済学』 日本評論社。
- Achdou, Yves, Jiequn Han, Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions, and Benjamin Moll. (2017) "Income and Wealth Distribution in Macroeconomics: A Continuous-Time Approach", *NBER Working Paper*, 23732.

- Lucas, Robert. E. (1978) "Asset Prices in an Exchange Economy", *Econometrica*, Vol.46, pp.1429-1445.
- Mehra, R. and E. Prescott. (1985) "The Equity Premium:A Puzzle", *Journal of Monetary Economics*, Vol.15, pp.145-162.
- Salyer, K. D. (1988) "Overlapping Generations and Representative Agent Models of the Equity Premium: Implications from a Growing Economy", *Canadian Journal of Economics*, Vol.21, pp.565-578.
- Storesletten, K., C. Telmer, A. Yaron. (2007) "Asset pricing with idiosyncratic risk and overlapping generations", *Review of Economic Dynamics*, Vol.10(4), pp.519-548.

緩和法による経済モデルの数値解法 (計算経済学の研究その24)

Numerical Analysis of Economic Models Using Relaxation Method

釜 国男^{*}
Kunio KAMA

多くの動的最適化問題において最適解は鞍点経路の形をとる。鞍点経路の存在や性質について数学的な議論は行われるが、実際に求めた例はほとんどない。通常は均衡点のまわりで線形近似したシステムの固有値を調べるが、これでは均衡点の近傍の性質しかわからない。Mulligan and Sala-i-Martin (1991) は時間を消去する方法を提案しているが、簡単なモデルにしか適用できない。本稿では緩和法と呼ばれる別のアプローチを取り上げることにする。緩和法では微分方程式を代数方程式に置き換えて解を求める。以下で示すように、モデルによっては簡単な計算で高精度の解が得られる。緩和法の考え方を説明したあと、ラムゼイモデル、アイスナー・ストロッツモデル、遅延微分方程式、およびグッドウィンモデルに適用してその有効性を実証する。

1. 緩和法

緩和法 (relaxation method) では、微分方程式を代数方程式で置き換えて解を求める¹⁾。一般に n 元連立微分方程式の初期値問題はつぎのように表される。

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$y_i(x_0) = y_{i,0} \quad (2)$$

つぎの代数方程式で (1) を近似することが可能である。

$$y_{i,k} - y_{i,k-1} - (x_k - x_{k-1}) f_i \left[\frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}), \frac{1}{2}(y_{1,k} + y_{1,k-1}), \dots, \frac{1}{2}(y_{n,k} + y_{n,k-1}) \right] = 0 \quad (3)$$

他の近似式も考えられるが³⁾、通常はこの式が使われる²⁾。(1) の変数 x は連続的に変化するが、これを $x_k (k=1, 2, \dots, m)$ で近似する。(3) は各点において n 個の解を与えるので、これらの方程式

^{*} 創価大学名誉教授

は全部で $n \times m$ 個の未知数を含んでいる。(3) は非線形の連立方程式であり、ニュートン法によって解を求める。 n_1 の初期条件と $n_2 = n - n_1$ の終端条件を与えて、中間点では

$$E_{i,k} \equiv y_{i,k} - y_{i,k-1} - (x_k - x_{k-1}) f_i(x_k, x_{k-1}, y_{1,k}, y_{1,k-1}, y_{2,k}, y_{2,k-1}, \dots, y_{n,k}, y_{n,k-1}) = 0 \quad (4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n, k = 2, 3, \dots, m)$$

によって近似する。全部で $(m-1)n$ の方程式があり、初期条件と終端条件が残りの方程式を与える。最初の境界点（初期条件）では

$$E_{0,i} \equiv B_i(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_1) \quad (5)$$

とする。最後の境界点（終端条件）では

$$E_{n+1,i} \equiv B_i(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i}) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m - n_2 + 1) \quad (6)$$

とおく。こうして (1), (2) を解く問題は (4)-(6) を満たす $y_{i,k}$ を求める問題に変換されることになる。 $E_{i,k}$ を $y_{i,k}^{(j)}$ と $y_{i,k-1}^{(j)}$ のまわりでテイラー展開すると

$$E_{i,j} \cong E_{i,j}(y_{1,k}^{(j)}, y_{1,k-1}^{(j)}, \dots, y_{n,k}^{(j)}, y_{n,k-1}^{(j)}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial E_{i,j}}{\partial y_{l,k}} (y_{l,k} - y_{l,k}^{(j)}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial E_{i,j}}{\partial y_{l,k-1}} (y_{l,k-1} - y_{l,k-1}^{(j)}) \quad (7)$$

となる。 $E_{0,i}$ と $E_{n+1,i}$ はつぎのように展開される。

$$E_{0,i} \cong E_{0,i}(y_{1,i}^{(j)}, \dots, y_{n,i}^{(j)}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial E_{0,i}}{\partial y_{l,i}} (y_{l,i} - y_{l,i}^{(j)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n_1) \quad (8)$$

$$E_{n+1,i} \cong E_{n+1,i}(y_{1,i}^{(j)}, \dots, y_{n,i}^{(j)}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial E_{0,i}}{\partial y_{l,i}} (y_{l,i} - y_{l,i}^{(j)}) \quad (i = 0, 1, \dots, m - n_2 + 1) \quad (9)$$

(7)-(9) の展開式をゼロとおき、 $y_{i,k}$ について解いて $y_{i,k}^{(j+1)}$ とする。このような計算を収束するまで繰り返す。簡単なモデルであればヤコビ行列は正確に計算できるが、複雑なモデルでは数値微分で代用する。

2. ラムゼイモデル

つぎの標準的なラムゼイモデルに緩和法を適用してみよう。

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \quad (10)$$

$$k(0) = k_0, \quad k(\infty) = k^*$$

ここで k^* は定常状態の資本ストックを表す。最適消費と資本はつぎの式を満たす。

$$\dot{c} = c \times \left(\frac{\alpha k^{\alpha-1} - \delta - \rho}{\theta} \right) \quad (11)$$

$$\dot{k} = k^\alpha - c - \delta k$$

定常状態の資本と消費は

$$k^* = \left(\frac{\alpha}{\delta + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (12)$$

$$c^* = (k^*)^\alpha - \delta k^*$$

で与えられる。資本の初期値 $k(0)$ は与えられており、 $c(0)$ が特定の値をとる場合のみ定常状態へ収束する。しかしそのような消費の値を求めることは非常に難しい。ごくわずかな誤差でも資本と消費は時間とともに発散してしまう。緩和法では (11) 式をつぎの代数方程式で置き換える。

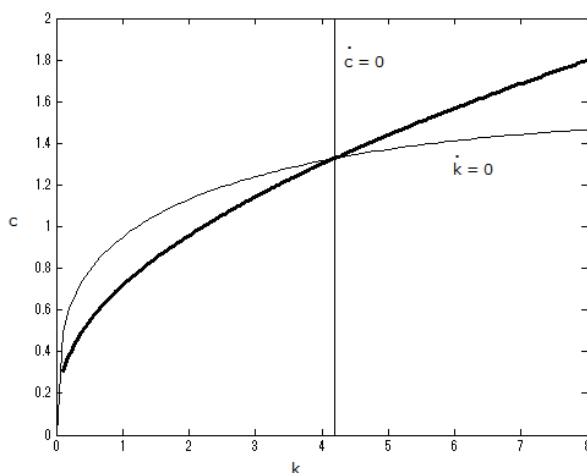
$$\frac{\Delta}{\theta} \times \left(\frac{c_k + c_{k-1}}{2} \right) \left[\alpha \left(\frac{k_k + k_{k-1}}{2} \right)^{\alpha-1} - \delta - \rho \right] - (c_k - c_{k-1}) = 0 \quad (13)$$

$$\Delta \times \left[\left(\frac{k_k + k_{k-1}}{2} \right)^\alpha - \frac{c_k + c_{k-1}}{2} - \delta \left(\frac{k_k + k_{k-1}}{2} \right) \right] - (k_k - k_{k-1}) = 0 \quad (14)$$

$$k_1 = k(0), \quad k_m = k^*$$

この式を満たす資本と消費の値をニュートン法で求めた。ただしヤコビ行列は数値微分で代用している。モデルのパラメータは $\alpha = 0.3, \theta = 2, \rho = 0.06, \delta = 0.05$ とする。期間は $0 \leq t \leq 100$ で資本ストックは 500 の分点で近似した。定常状態の資本と消費は $k^* = 4.19, c^* = 1.33$ となる。(13) 式と (14) 式の資本と消費の解を組み合わせると鞍点経路（図1の太い曲線）が得られる。均衡点から左側のアームは $k(0) = 0.1$ に対応し、右側のアームは $k(0) = 8$ とした場合である。いずれの場合も資本と消費は時間とともに定常点へ収束する。(13),(14) 式は 1,000 個の未知数を含んでおり、収束解を与える初期値は簡単には見つからない。一般に多変数のニュートン法では初期値の設定が厄介な問題となる。

図1 資本と消費の経路



3. アイスナー・ストロツツモデル

アイスナー・ストロツツの投資モデルにおいて³⁾、企業は異時点間にわたる純利益の現在価値を最大化する。すなわち、

$$\max_I \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[\pi(K) - I - \psi \left(\frac{I}{K} \right) I \right] dt \quad (15)$$

$$s.t. \quad \dot{K} = I, \quad K(0) = K_0$$

ここで K は資本ストック、 I は投資、 $\pi(\cdot)$ は売上高、 $\psi(\cdot)$ は資本の調整費用を表す。最適投資の条件は

$$q = 1 + \psi \left(\frac{I}{K} \right) + \frac{I}{K} \psi' \left(\frac{I}{K} \right) \quad (16)$$

である。変数 q はトービンの Q に相当する。数値計算では

$$\pi = K - 0.475K^2$$

$$\psi = 3 \left(\frac{I}{K} \right) + \left(\frac{I}{K} \right)^2$$

と仮定する。 $\rho = 0.05$ とすると、 $\pi'(K^*) = \rho$ から $K^* = 1$ となる。また (16) の条件から

$$\dot{K} = \tau(q) \quad (17)$$

$$\tau(q) = \frac{-3 + \sqrt{6 + 3q}}{3}$$

が成り立つ。 $\tau'(q) > 0, \tau(1) = 0$ であり、投資は $q > 1$ ならプラス、 $q < 1$ ならマイナス、 $q = 1$ ならゼロとなる。(16) から q の運動式は

$$\dot{q} = \rho q - \pi'(K) - \left(\frac{I}{K}\right)^2 \psi'\left(\frac{I}{K}\right) \tag{18}$$

で与えられる。横断性条件は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} q(t) K(t) = 0$$

である。上で仮定した関数の場合、(18) は

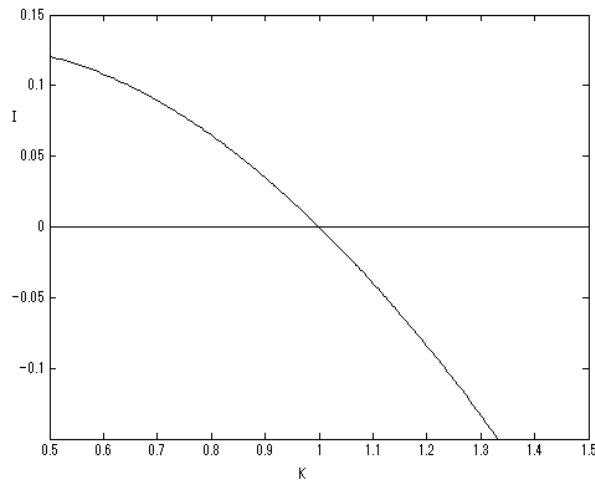
$$\dot{q} = \rho q - 1 + 0.95K - 3\tau(q)^2 - 2\tau(q)^3 \tag{19}$$

となる。結局、アイスナー・ストロツモデルは (17) と (19) の2つの式で表される。両式は K と q に関する微分方程式であり、緩和法によって数値解を求めた。図2は数値計算の結果に基づいて投資と資本ストックの関係を示している。資本が増加すれば投資は減少し、 $K < 1$ であれば投資はプラス、 $K > 1$ なら投資はマイナスとなる。このため資本ストックは $K^* = 1$ へ収束して横断性条件は満たされる。図の曲線に資本の多項式を当てはめると、

$$I(K) = 0.05405 + 0.4272K - 0.7763K^2 + 0.4888K^3 - 0.2657K^4 + 0.08338K^5 - 0.01148K^6$$

となる。 $\pi(\cdot)$ と $\psi(\cdot)$ について別の関数を仮定しても同じような結果が得られる。

図2 投資と資本ストックの関係



4. 遅延微分方程式

独立変数 x の関数 $y(x)$ に関するつぎの形の方程式を遅延微分方程式 (delay differential equation) という。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x), y(x-\tau)) \quad (20)$$

ここで $\tau > 0$ は遅延、あるいは遅れ時間とよばれる。一般に

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x), y(x-\tau_1), y(x-\tau_2), \dots, y(x-\tau_n))$$

と複数の遅延が含まれる。さらに遅延時間が変化する場合もある。

遅延微分方程式は主に生態学や工学で使われるが、経済学でも景気循環の分野で重要な役割を果たしている。ここではカレッスキーの景気循環モデルとラグ付きラムゼイモデルを取り上げることにしよう。

Deeba 他 (2003) によると、カレッスキーモデルは

$$\dot{K}(t) = \left(\frac{a}{\tau} - n\right)K(t) - \left(\frac{a}{\tau} + m\right)K(t-\tau) - \varepsilon K^3(t) \quad (t \geq 0) \quad (21)$$

と表される。ここで $K(t)$ は資本ストック、 τ は資本の懐妊期間であり、 ε は資本の利潤抑制効果を表すパラメータである。この方程式の解を求めるには、通常の微分方程式の初期値に相当する履歴関数 $\varphi(t)$ を与える必要がある。履歴関数は一定の値をとり

$$\varphi(t) = 2 \quad (-\tau \leq t \leq 0) \quad (22)$$

とする。これを初期条件として、 τ の区間ごとに通常の微分方程式をつぎつぎに解いていく。

最初に $0 \leq t \leq \tau$ のとき $K(t-\tau) = 2$ であり、(21) は

$$\dot{K}(t) = \left(\frac{a}{\tau} - n\right)K(t) - 2\left(\frac{a}{\tau} + m\right) - \varepsilon K^3(t) \quad (0 \leq t \leq \tau) \quad (23)$$

となる。初期条件を $K(0) = 2$ として解けば $[0, \tau]$ の区間で解が得られる。

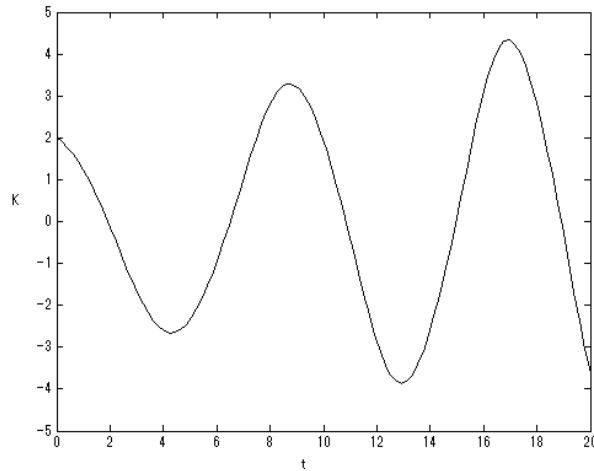
次にこうして得られた解を履歴関数として $[\tau, 2\tau]$ の区間について (21) の解を求める。同様の方法で得た解をつなぎ合わせたものが全区間の解となる。

実際の計算では、(21) 式を

$$\dot{K}(t) = \alpha K(t) - \beta K(t-\tau) - \varepsilon K^3(t)$$

と表す。ただし $\alpha = a/\tau - n$, $\beta = a/\tau + m$ である。言うまでもなく、パラメータの値によって資本の経路は違ってくる。遅延時間は $\tau = 1$ であり $\alpha = 0.95$, $\beta = 1.15$, $\varepsilon = 0.01$ とした。図3は資本ストックの動きを示している⁵⁾。資本ストックは $K = 0$ のまわりで振幅を拡大しながら振動し、定常状態では $-5.58 \leq K \leq 5.58$ の区間で振動を繰り返す。解の1次導関数は $t = 0$ で不連続となる。この点では履歴関数の1次導関数が微分方程式を満たさないからである。不連続性は τ の間隔で未来に伝播する。 $\varepsilon = 0$ であれば資本の利潤抑制効果がなくなり振幅は時間とともに拡大する。逆に、 α の値が小さいときは減衰して0に収束する。さらに、 $\alpha > \beta$ であれば $\sqrt{(\alpha - \beta)/\varepsilon}$ に収束

図3 資本ストックの変動



する。このようにパラメータの値によって資本は様々な動きを示す。

次に Asea and Zak (1999) に倣ってラムゼイモデルに Kydland and Prescott (1982) の time to build を組み込んでみよう。ラムゼイモデルをつぎのように修正する。

$$\begin{aligned} & \max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) dt \\ & \text{s.t. } \dot{k}(t) = f(k(t-\tau)) - \delta k(t-\tau) - c(t) \\ & k(t) = \varphi(t) \quad (-\tau \leq t \leq 0) \end{aligned} \tag{24}$$

今期の生産に寄与するのは τ 期前の資本ストックである。効用最大化の条件は

$$\dot{c}(t) = \frac{u'(c(t))}{u''(c(t))} (\rho + \delta - f'(k(t-\tau))) \tag{25}$$

と表される。解析的な方法で解を求めるのは難しいので、区間接続法によって数値解を求めるこ

とにした。効用関数と生産関数は

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad f(k) = k^\alpha \quad (26)$$

とする。この場合、(25) は

$$\dot{c}(t) = c \left(\frac{\alpha k(t-\tau)^{\alpha-1} - \rho - \delta}{\theta} \right)$$

となる。遅延時間は $\tau = 1$ であり、消費と資本の履歴関数は

$$\varphi_c(t) = \eta, \quad \varphi_k(t) = \lambda$$

とする。定常状態における資本と消費はラグのない場合と同じ値となり、先の (12) 式で与えられる。均衡解は鞍点経路となり、 η と λ を適当に与えると解が得られる⁶⁾。遅延がない場合と同じパラメータを用いると、定常状態では $k^* = 4.193$, $c^* = 1.328$ となる。(25) 式は $0 \leq t \leq 1$ では

$$\frac{\dot{c}}{c} = \psi, \quad \psi = \frac{\alpha \lambda^{\alpha-1} - \rho - \delta}{\theta}$$

となる。この方程式を初期条件 $c(0) = \eta$ のもとで解くと

$$c(t) = \eta e^{\psi t} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (27)$$

を得る。資本ストックはつぎの式を満たす。

$$\dot{k}(t) = \lambda^\alpha - \delta \lambda - \eta e^{\psi t}$$

両辺を時間で積分して、 $k(0) = \lambda$ を代入すると

$$k(t) = \lambda + (\lambda^\alpha - \delta \lambda)t + \frac{\eta}{\psi}(1 - e^{\psi t}) \quad (28)$$

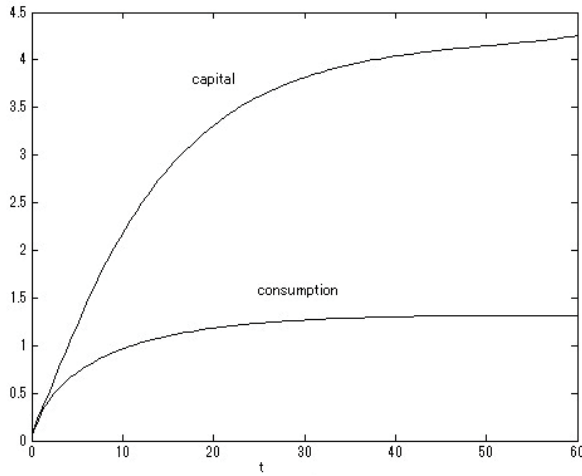
となる。履歴関数の値を $\lambda = 0.06$, $\eta = 0.0995$ とすると、 $\psi = 1.020$ であり資本と消費は

$$k(t) = 0.158 + 0.427t - 0.0975e^{1.020t} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$c(t) = 0.0995e^{1.020t}$$

で与えられる。このように $0 \leq t \leq 1$ の区間では解析解が得られる。しかし、 $t \geq 1$ については解析解がないので緩和法で数値解を求めた。図 4 は $0 \leq t \leq 60$ の区間でモデルの解を示している。明らかに資本ストックと消費は定常値へ収束している。先の図 1 と比較すると、time to build を考慮しても短期的な調整過程に目立った違いは見られない。ただし鞍点経路を求めるのは格段に難しくなる。遅延時間が極端に長くない限り、タイムラグのないラムゼイモデルを用いても大き

図4 資本ストックと消費の変動



な誤差は生じない。

5. グッドウィンモデル

最後に、Goodwin (1967) の循環的成長モデルを取り上げる。グッドウィンによると、経済成長に伴って雇用が拡大すれば労働需要の増加で賃金は上昇して労働分配率は高くなり投資と生産は減少する。その結果、労働需要は減少して賃金と労働分配率は低下する。すると投資は拡大して雇用は増加する。このため労働者の交渉力は高まり、賃金は上昇して労働分配率は再び高くなる。このようなプロセスを繰り返しながら経済は成長トレンドのまわりで変動する。

グッドウィンモデルはつぎの2つの微分方程式で表される⁷⁾。

$$\dot{e} = [\sigma(1 - \omega) - (\alpha + \beta)]e \tag{29}$$

$$\dot{\omega} = [\sigma\mu(\omega^* - \omega) + \rho(e - e^*) - \alpha]\omega \tag{30}$$

ただし e は雇用率で ω は労働分配率である。また σ は産出・資本比率を表し、 α は平均労働生産性の上昇率、 β は労働供給の増加率、 μ は価格調整係数、 ρ はフィリップス曲線の調整係数、 ω^* は均衡労働分配率、 e^* は自然失業率である。均衡点は $E_0(0,0)$ と $E_1(\omega_{ss}, e_{ss})$ の2つあるが、経済的に意味があるのは E_1 である。ただし

$$\omega_{ss} = \frac{1}{\sigma}[\sigma - (\alpha + \beta)] \tag{31}$$

$$e_{ss} = \frac{\sigma\mu}{\rho} \omega_{ss} + \frac{1}{\rho} (\rho e^* - \sigma\mu\omega^* + \alpha) \quad (32)$$

モデルの動学的性質を調べるために、(29) と (30) 式を均衡点のまわりで線形化すると、ヤコビ行列は

$$J(\omega_{ss}, e_{ss}) = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma e_{ss} \\ \rho\omega_{ss} & -\sigma\mu\omega_{ss} \end{bmatrix}$$

となる。 J の固有方程式は

$$\lambda^2 + \lambda\sigma\mu\omega_{ss} + \sigma\rho e_{ss}\omega_{ss} = 0$$

であり固有値は

$$\lambda = \frac{-\sigma\mu\omega_{ss} \pm \sqrt{(\sigma\mu\omega_{ss})^2 - 4\sigma\rho e_{ss}\omega_{ss}}}{2}$$

となる。 $(\sigma\mu\omega_{ss})^2 - 4\sigma\rho e_{ss}\omega_{ss} < 0$ であれば、均衡点は渦状点となる。(29),(30) は非線形の微分方程式であり、線形化方程式では均衡点の近傍の動きしかわからない。大域的な動きを見るには方程式を解く必要がある。このため緩和法を適用して数値解を求めることにした。計算に当たってパラメータは $\sigma = 0.4, \mu = 0.3, \alpha = 0.1, \beta = 0.03, \rho = 0.2, \omega^* = 0.7, e^* = 0.08$ とする。(31),(32) から求めた定常値は $\omega_{ss} = 0.675, e_{ss} = 0.565$ である。数値計算では(29),(30) 式をつぎの代数方程式で近似する。

$$[\sigma(1 - \omega_i) - (\alpha + \beta)]e_i - (e_{i+1} - e_i) / \Delta = 0$$

$$[\sigma\mu(\omega^* - \omega_i) + \rho(e_i - e^*) - \alpha]\omega_i - (\omega_{i+1} - \omega_i) / \Delta = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\omega_1 - 0.5 = 0 \quad (33)$$

$$e_1 - 0.4 = 0$$

最後の2つの式は初期条件である。 $n = 400$ で、期間は $0 \leq t \leq 120$ とした。図5は方程式の誤差が減少する様子を示している。(33) は比較的簡単な式であり、少数回反復するだけで解が得られる。もちろん初期値関数によって反復回数は違ってくる。労働分配率と雇用率はらせん状に均衡点へ収束する(図6)。分配率と雇用率の初期値を0.5, 0.4としているが、他の値でも同じ点に収束する。何らかの理由で経済が成長トレンドから外れても、雇用と所得分配は速やかに元の状態へ戻る。したがってモデルの経済は動学的に安定している。

図5 方程式の誤差

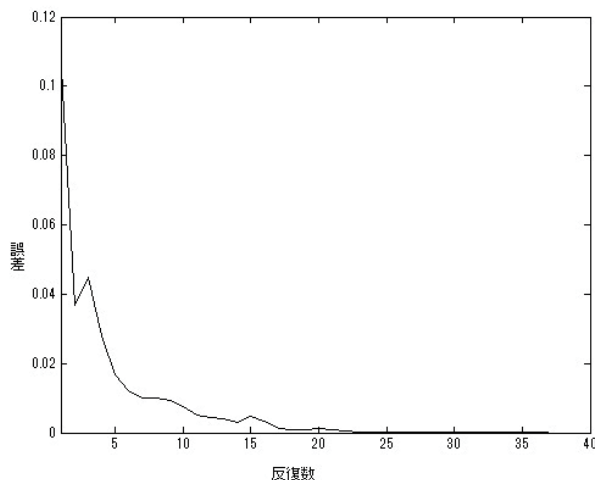
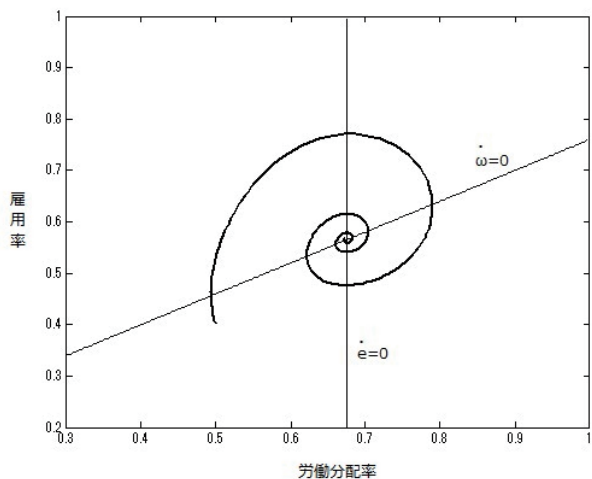


図6 労働分配率と雇用率の変動



6. 結語

これまで緩和法は主として連立1次方程式、とくに偏微分方程式の差分近似で現れる線形方程式に適用されてきた。ここでは常微分方程式を代数方程式で置き換えて非線形連立方程式から解を求める方法について検討した。この方法の利点は初期条件や終端条件を簡単に考慮できることである。ルンゲ・クッタ法など従来の方法を用いると煩雑な計算が必要である。また状態変数と制御変数の経路が分かれば、時間を消去することで動的計画法の政策関数を得ることができる。緩和法には初期値の設定がむずかしいという難点がある。とくに最適解が鞍点経路となる場合は適当な初期値を見つけることは簡単ではない。これは今後検討すべき課題である。

注

- 1) Press 他 (2007) は緩和法の基本的な文献である。釜 (2021) は緩和法を簡単な経済モデルに適用した例を示している。
- 2) 異なる2つの値の平均をとる代わりに1つの値だけでもかまわない。この場合、(3) 式は

$$y_{i,k} - y_{i,k-1} - (x_k - x_{k-1})f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}) = 0$$

と簡単になる。

- 3) Robert Eisner and Robert H. Strotz, “Determinants of Business Investment,” in *Impacts of Monetary Policy*, Commission on Money and Credit, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963, pp.59-337.
- 4) 区間接続法については三井、小藤、齋藤 (2004) の第3章が参考になる。
- 5) 変数 K は資本ストックの成長トレンドからの乖離を表し、プラスやマイナスとなる。
- 6) 消費と資本ストックが一定であれば、 $\eta = \lambda^\alpha - \delta\lambda$ という条件を課すことが考えられる。しかしこの条件を課すと安定解は得られない。
- 7) 詳しくは元木 (1982) を参照せよ。

参考文献

- 釜国男 (2021) 『計算経済学』日本評論社。
- 三井斌友、小藤俊幸、齋藤善弘 (2004) 『微分方程式による計算科学入門』共立出版。
- 元木久 (1982) 「循環的成長論の検討：Goodwin モデルについて」『関西大学経済学論集』第32巻1号、17-46頁。
- Asea P., and P. Zak. (1999) “Time to Build Model and Cycles”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.23(8), pp.1155-1175.
- Deeba, E., G. Dibeh, S. Khurl and S. Xie. (2003) “Decomposition Method for Solving a Nonlinear Business Cycle Model”, *ANZIAMJ*, Vol.45, pp.295-302.
- Goodwin, B. R. (1967) “A Growth Cycle,” in C. H. Feinstein (ed.) *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Cambridge University Press, pp.54-58.
- Kalecki, M. (1935) “A Macrodynamics Theory of Business Cycles”, *Econometrica*, Vol.3, pp.327-344.
- Kydland, F. E., and E. C. Prescott. (1982) “Time-to-build and Aggregate Fluctuations”, *Econometrica*, Vol.50(6), pp.1345-1370.
- Mulligan, C. B and X. Sala-i-Martin. (1991) “A Note on the Time-Elimination Method for Solving Recursive Dynamic Economic Models”, *NBER Technical Working Paper*, No.116.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery. (2007) *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing 3rd. ed.*, Cambridge University Press.

ロシアのウクライナ侵攻が 小麦の国際価格に及ぼす影響について

Impacts of Russian Invasion of Ukraine on International Price of Wheat

齋藤 之美¹・齋藤 勝宏²
Konomi SAITO and Katsuhiko SAITO

1. はじめに

2022年2月24日ロシアがウクライナでの特別軍事作戦を開始し、いわゆるロシアのウクライナ侵攻が始まった。現在も東部・南部地域を中心に戦闘が続いている。この侵攻により灌漑設備や農業機械などの生産設備、穀物貯蔵倉庫などの流通インフラが被害を被っている。また、黒海封鎖により行き場をなくした輸向け農産物の毀損や農業資材の輸入減少による国内生産への影響などの混乱が生じており、この混乱が小麦の国際市場にも波及している。小麦の貿易は基本的に契約ベースで行われているが、ウクライナの輸出先は主に中東やアフリカ諸国であり、これらの国々では想定していた輸入量を確保できず不足分はスポット市場で調達せざるを得なくなるため、輸入価格だけではなく国際価格が高騰する要因ともなっている。食料は必需品であり需要の価格弾力性も小さいため、供給量がわずかな減少でも、価格が大きく上昇する傾向がある。2008年の食料危機でも経験しているように、多少極端ではあるが、食料不足への懸念が生じるとそれが価格に反映されてしまう。

実際、ロシアのウクライナ侵攻が勃発した後、小麦の国際価格が上昇しているというニュースが数多く報道された。ニュースに接すると、あたかもウクライナ侵攻が小麦の国際価格を上昇させたように思われるが、小麦価格はロシアのウクライナ侵攻以前から上昇してはいた。小麦の国際価格上昇は、原油や天然ガスなどのエネルギー価格高騰、北米の干魃などの異常気象の影響、肥料価格の上昇やCOVID-19の影響などさまざまな要因が複雑に絡み合って引き起こされている。とはいえ、ウクライナ侵攻が価格を上昇させたことは確かである。小麦はコメと並んで世界中で主食とされており、生命を維持するためのエネルギー源の大宗を占めることから、ウクライナ侵攻がフード・セキュリティに及ぼす影響を評価する上でも、国際価格上昇に及ぼすインパクトを評価することは重要な課題である。

例えば、Mottaleb et al. (2022) は、FAOStat、World Hanger Index、Worldbank WDI をベース

1 創価大学経済学部教授

2 東京大学大学院農学生命科学研究科教授

本研究は J S P S 科研費 21H02294 の研究成果の一部である。

に輸入国の逆需要関数を推計し、小麦の生産量、輸入量、小麦の国際価格と国内価格の関係と、ひとりあたりの小麦消費量、カロリー摂取、タンパク質摂取と国内小麦価格の関係を推計し、小麦の国際輸出が1%減少すると小麦の国内価格が1.1%上昇すること、国内小麦価格が1%上昇すると年間ひとりあたり小麦消費量を0.59%、1日あたりのカロリー摂取量を0.54%、タンパク質摂取量を0.64%減少させることを明らかにしている。その上で、ウクライナの輸出が50%減少すると輸入国の小麦の国内価格を潜在的に15%上昇させるという結論を導き出した。計測期間は2016年から2019年であり、直近データを用いている点では理想的ではあるが部分均衡分析のフレームワークを用いており、小麦の国際価格決定のメカニズムが組み込まれていないという点で十分ではない。

小麦の国際価格に及ぼす影響を評価するには、時系列分析やパネルデータ分析などの統計的手法を用いるのが一般的である。しかしながら、ウクライナ危機による輸出量減少が引き起こす影響を独立させて分析することは容易ではない。そこで、本研究では小麦を含むさまざまな財の国際需給も明示的に含む国際貿易一般均衡分析を用いて、ウクライナの小麦輸出量減少が国際小麦価格に及ぼす影響について検討することを目的とする。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では、小麦の国際需給と国際価格の推移について検討する。第3節では、ウクライナ危機とフード・セキュリティについてまとめる。第4節では小麦の輸出大国の貿易率を確認し、食料安全保障上の問題について検討する。第5節では、ウクライナの輸出減少が小麦の国際価格に及ぼす影響についての評価を行う。第6節は全体を通してのまとめである。

2. 小麦の国際需給と小麦価格の推移

1960年初頭には2億3千万トンであった世界の小麦生産量は、世界の人口増加を背景として飛躍的に増加し、現在の生産量は約8億トンである。この間、収穫面積はほぼ横ばいであったが、品種改良などの技術進歩により単収が1.16トン/haから3.5トン/haへと増加し生産増加に貢献している。需給状況は生産と消費の差で見ることもあるが、その差は在庫として蓄積されるため、穀物年度の期首あるいは期末在庫が年間消費量に占める割合で需給状況を見ることもあり、在庫率が20%を切ると需給が危険水域にあると言われている。

図1で示された在庫率を見ると1973年、2008年に需給が逼迫していたこと、その後は需給が緩んでいたが、直近数年間は少しずつ在庫が減少してきていることが確認できる。小麦価格の名目価格の推移をまとめたものが図2である。価格の推移を見ると1973年には小麦価格がほぼ2倍に高騰している。1972年の世界的な不作とソ連の国際穀物市場への本格的な参入によって小麦の国際需給は逼迫し、穀物の国際市場は過剰基調から不安定な市場へと様変わりし穀物の国際価格は高騰した。1980年代になると各国の食料増産政策により過剰農産物時代を迎え、国家レベルでの食料問題が一応解決した。2008年にも小麦の需給が逼迫した。2000年以降の原油価格の上昇やバイオ燃料政策によるトウモロコシ需要の増大による穀物価格上昇や穀物価格上昇に伴

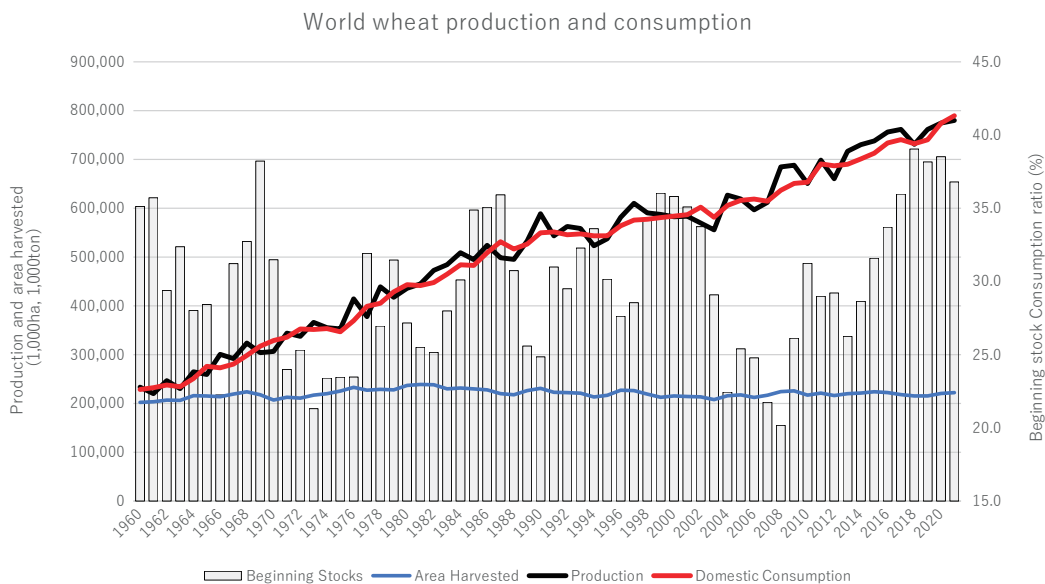


図1 世界の小麦需給

出所：PS & D (ERS/USDA) より著者作成

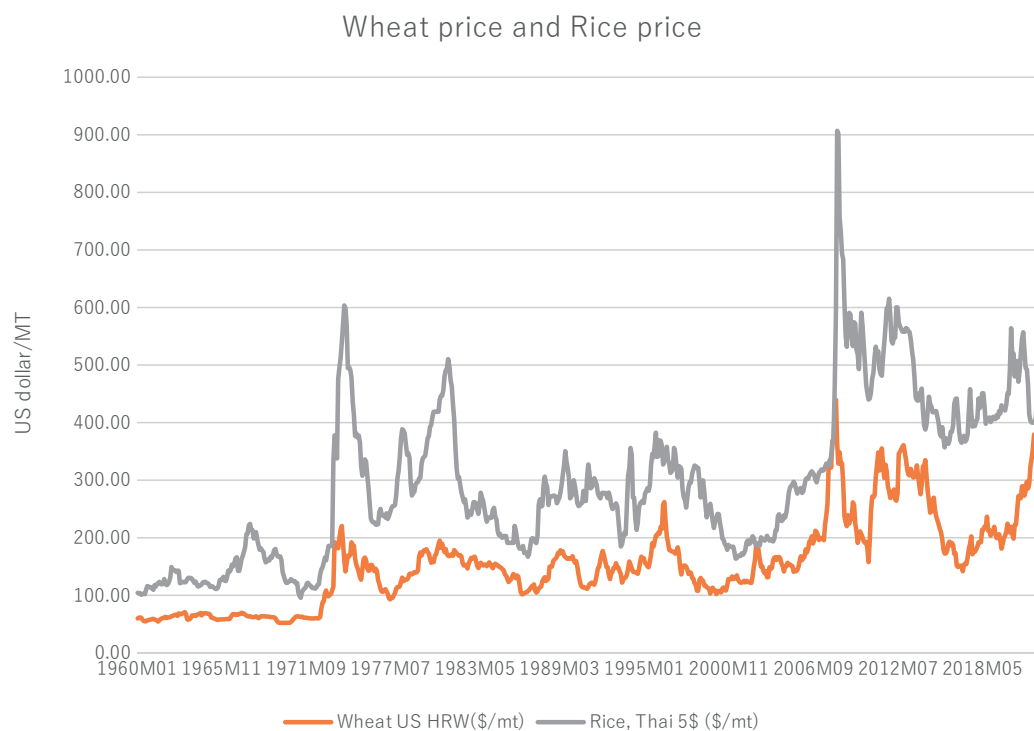


図2 小麦とコメの国際価格の推移

出所 World Bank, Commodity Markets (Pink Sheet) に基づき著者作成

う投機マネーの流入、さらにはオーストラリアの2年続きの干魃による不作の影響であると言われている。このときも小麦の国際価格は2倍以上に高騰している。その後は落ち着くかに見えたが、コロナ感染症パンデミックが発生した2020年の半ば頃から価格は上昇傾向にあり、ウクライナ危機勃発後の2022年3月にはトンあたり490ドルと、前月の390ドルと比べ100ドルもの価格上昇が観察された。

小麦以外の価格の推移についても確認しておく。図3はFAOが公表している月次食料価格指数である。2020年5月頃から食料価格が上昇し始めている。特に油脂類の価格上昇が著しく、2020年5月に77.7だった価格指数が2022年2月には201.7、3月には251.8まで上昇した。このような油脂価格の上昇を受け、インドネシアではパームオイルの輸出を一時期禁止した。

グラフは省略するが、原油価格の推移を見ると、2020年1月に1バレル約61ドルだったものが、4月には21ドルに下落し、その後上昇を続け2022年2月には93ドル、4月には112ドルの水準まで上昇した。肥料価格もその成分によって価格が変わるので一般的な肥料価格というデータはないが、リン鉱石、リン酸アンモニウム、重過リン酸石灰、尿素の名目国際価格の推移を確認する。リン酸アンモニウム、重過リン酸石灰、尿素は2008年に価格が高騰した後、下落傾向が続き、2020年4月から6月をボトムとして上昇を続けている。2022年2月の価格がトンあたりそれぞれ747ドル、686ドル、744ドルだったものが翌3月には954ドル、792ドル、873ドルに上昇している。一方、リン鉱石は2月から3月にかけてはほとんど変化がないが3月から4月にかけてトンあたり179ドルから250ドルに高騰した。ウクライナ侵攻を受けて、小麦の国

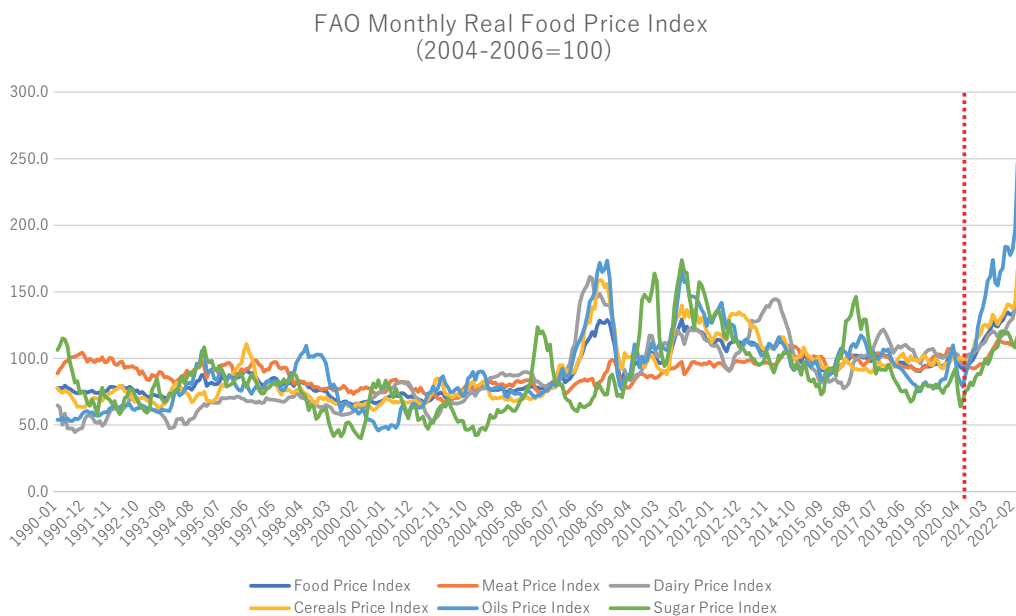


図3 食料価格の推移

出所：FAO World Food Situation (FAO Food Price Index) より作成

際価格だけではなく農業資材価格も上昇したことを確認したが、2月から3月にかけての価格データの増分を見ると Regression Discontinuity Design³を用いて、この期間の影響が統計的に検出できそうである。

3. ウクライナ危機とフード・セキュリティ

前節では、小麦の国際需給の推移について確認した。1972年の世界的な不作とソ連の国際穀物市場への参入により、穀物の国際市場は過剰基調から不安定な市場へと様変わりし穀物の国際価格は高騰した。これを契機に、1974年世界食料サミットでは、食料安全保障を「食料消費の堅調な拡大を支え、価格と生産の変動を相殺し得るような、基本的な食料の世界レベルでの適切な供給を常時可能とすること」と定義し、食料安全保障を確保するために国家レベルでの食料増産政策が始まった。1980年代の過剰農産物時代を迎え、国家レベルでの食料問題が一応解決すると、ミクロレベルで食料増産の恩恵を受けられない人々が常に存在しているという分配上の問題が認識されるようになる。食料安全保障の視点が供給サイドから需要サイド、地域・国家から世帯・個人レベルへと関心が移されることとなり「すべての人々」を対象とする食料安全保障の概念が必要であると認識されることとなる。1996年の世界食料サミットでは、フード・セキュリティを「すべての人が、いかなる時にも、活動的で健康的な生活に必要な食生活上のニーズと嗜好を満たすために、十分に安全かつ栄養ある食料を、物理的、社会的及び経済的にも入手可能であるときに達成される状態」であると定義された。1970年代の食料危機以来重視されてきた量的充実に加え、食料以外の衛生面や健康管理さらには飲用水の確保などもフード・セキュリティの概念には含まれているし、安定性は、いついかなるときも全世帯、個人が十分な食料にアクセスできることを意味しており、1970年代に誕生したフード・セキュリティの概念と比較すると、それぞれの時代のフード・セキュリティの懸案事項を反映して、包摂する範囲が拡大している。

ロシアのウクライナ侵攻との関連で言うと、小麦価格の高騰は低所得層の食料へのアクセスに特に大きな影響を及ぼすという意味で、グローバルな視点からフード・セキュリティの問題でもある。一方で、補論1でも議論するように所得水準の高い国の中には、価格維持政策などによって穀物価格が上昇しても栄養不足人口に影響を及ぼさない国も存在している。例えば、日本では小麦は国家貿易により政府が一元的に管理しており、輸入小麦の国内価格は直近6ヶ月間の加重平均により4月と10月に年2回改定されるが、2022年10月期での価格改定では約20%の価格上昇が想定されたが据え置かれている。

3 Regression Discontinuity in Time については、例えば、Hausman and Rapson (2018)などを参照のこと。但し、この手法を用いるためには日次データもしくは週次データなど高頻度データを用いる必要がある。利用可能なデータは月次データであるが、これではウクライナ危機の識別ができない可能性もある。

4. おもな小麦輸出大国の貿易率

貿易率は生産に占める輸出の割合として定義されるものであり、鉱工業製品でその割合は高く、農産物では大豆を除いては低い値をとっている。穀物の消費は毎年安定的に推移する反面、生産は降水のパターンや気温などの影響を受けるため単収変動が大きく、貿易率が低いほど貿易量に及ぼす影響も大きくなる傾向がある。少し古いデータだが、農林水産省『食料・農業・農村白書2008年度版』によると、コメが7%、小麦が19%、トウモロコシ13%、大豆30%、牛肉13%、豚肉5%、石油62%、乗用車44%というデータが紹介されている。

貿易率から判断するとコメの国際価格は小麦の国際価格に比べ、輸出国の単収変動の影響を大きく受ける傾向があることがわかる。先にも述べたように穀物は主食を構成する農産物であり、低所得者ほどエンゲル係数が高いことから、価格変動が低所得者の食料アクセスに及ぼすインパクトは大きい。

より詳しく輸出上位国について貿易率をコメと小麦についてまとめてみた。図4はコメについてまとめたものだが、アメリカ、パキスタンを除き輸出率が小さいことを確認することができる。コメを主食とする国はそのほとんどが自給を基本としているため、生産量のほとんどが国内自給に仕向けられ、余剰分が輸出される。齋藤他（2018）は、近年東南アジア諸国の間のコメの単収変動の相関係数が高くなることを指摘しており、より大きな国際価格の変動が生ずることとなる。食料の安定的な供給は最も重要な国家の責務のひとつであり、食料危機が懸念されれば、2008年の食料危機で観察されたように輸出制限ないし輸出禁止政策をとることもある。小麦についてはどうか。図5は、主な小麦の輸出国について、輸出率をまとめたものである。主な輸出国の貿

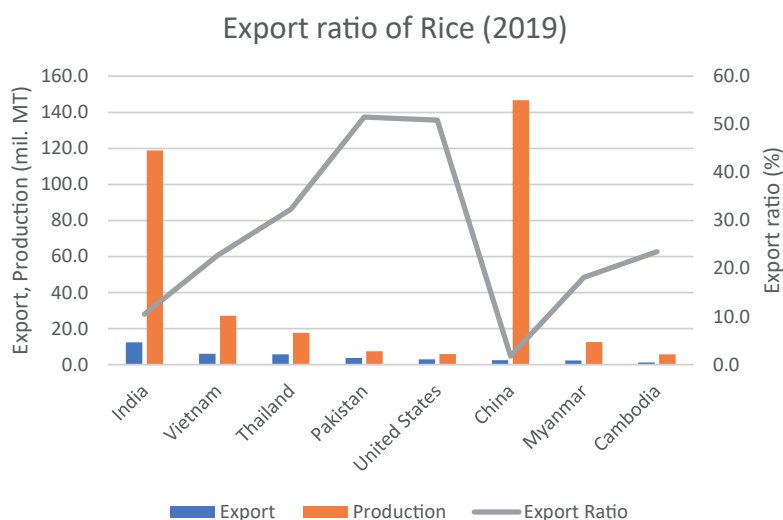


図4 主なコメ輸出国の貿易率（2019年）

出所：PS&D(ERS/USDA)に基づき著者が作成

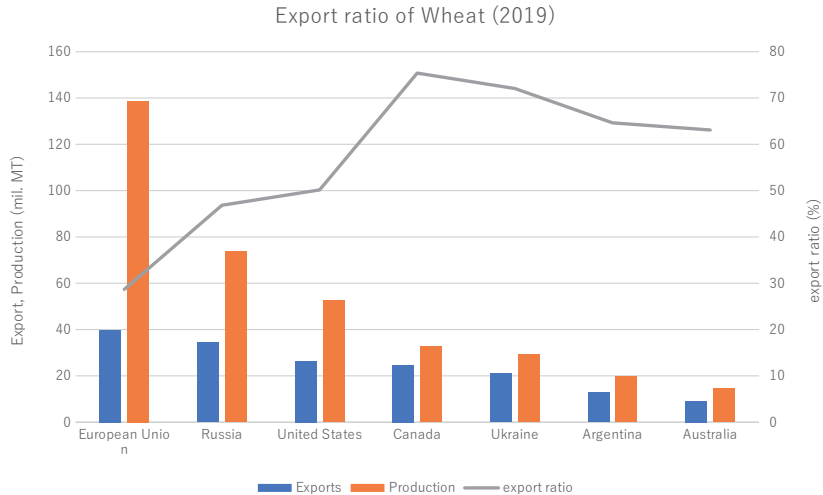


図5 主な小麦輸出国の貿易率 (2019年)
出所：PS & D (ERS/USDA) に基づき著者が作成

易率はコメと比べるとかなり高い。在庫を別とすれば、生産と輸出との差は国内あるいは域内消費であり、その割合はコメほど高くはないため、単収変動が国際市場に及ぼす影響はコメほど大きくはない。輸出を目的とする生産を行っているため、特段の事情がない限り、これらの国々が輸出制限や輸出禁止を行うインセンティブもない。この図を見る限り、著者たちは、小麦に関しては食料安全保障上の問題が生じる可能性はかなり低いと見て差し支えないと考えていた⁴。ところが、昨年2月に勃発したロシアのウクライナ侵攻は、小麦輸出シェアの第二位と第五位を占めるロシア、ウクライナのふたつの輸出大国⁵の輸出量を減少させ、小麦の国際需給に大きな影響を及ぼした。小麦輸出大国の貿易率を見ると、小麦に関しては食料安全保障上の問題は生じないと考えられてきた。それは戦争などの偶発的な食料危機の可能性が極めて低いとの前提に立脚するものであるが、ひとたび輸出大国で危機が発生すると世界のフード・セキュリティに大きなインパクトを与えるのだという教訓、確率が低いとはいえ食料安全保障に及ぼす偶発的危機の影響を過小評価すべきではないという教訓は忘れてはならない。

4 2021年12月に著者のひとりが台湾・中興大学で行った **Agricultural trade and food security** と題する講演では、この図の解釈として小麦に関しては食料安全保障上の問題が生ずる可能性が低いという見解を示した。

5 ウクライナはチェルノーゼムという肥沃な土壤に恵まれ「世界のパンかご」と呼ばれ、米国・カナダのプレーリー、アルゼンチンのパンパとともに世界の三大穀倉地帯を形成している。1991年ソ連の崩壊に伴い独立したが、農業への補助金削減、資金不足による肥料・農薬の投入減少を背景に1990年代には農業生産は減少した。2000年代は農業部門の改革や民営化が奏功し生産性が回復し穀物の輸出国になっている。ヒマワリ・植物油、小麦、トウモロコシの輸出国となっている。EPRS (2022) はEUにおけるウクライナ危機のフード・セキュリティに与える影響として、ひまわり油の不足を指摘している。

5. ウクライナの小麦輸出減少が引き起こす影響

輸出減少の効果を短期と長期に分けて考察する。ここで言う短期とはそれぞれの生産者が生産量を変更できない期間であり、長期とはそれぞれの生産者が生産量を自由に調整できる期間である。戦禍でウクライナ国内の農業生産基盤である農地や生産設備、流通インフラが被害を被っておりその復旧をも考慮する必要があるうえ、侵攻が長引くと生産性も低下するが、ここでは国際市場に及ぼす影響を考えるので、ウクライナ国内の事情は考慮しない。ウクライナの小麦輸出減少により、短期的にはウクライナの輸出先が契約している小麦を輸入できずスポット市場で調達することから生じる国際価格の上昇がある。国際価格にどれだけ影響するかはそれぞれの輸入先間の代替弾力性に依存する。また、小麦の国際需給データで確認したように穀物には緩衝在庫があるため、輸出の不足に対して在庫をどの程度放出するかという現在と将来の財の配分にも依存する。いずれにしても、国際価格の上昇は発展途上国の貧困層に大きなインパクトを及ぼすことになる。長期的には生産者は自由に生産調整を行うことができるため、もし近い将来小麦価格が上昇すると予想するならば作付面積を増加させるであろうし、価格の高止まりが続くと予想すれば、新規投資による生産規模の拡大も視野に入れることにより小麦の生産は増加し、国際価格を安定化させる。

短期とはどの程度の期間を指すのか。ここでは主な輸出国の小麦の作付体系で確認する。図6は小麦のクロープカレンダーであり、ウクライナ侵攻の時期を赤いラインで示している。危機勃発の時期には、ウクライナは2021年秋に収穫した小麦を輸出している。勃発と同時に輸出が減少するので小麦の国際価格は上昇する。アメリカおよびカナダの春小麦の播種時期は4月から5月なので、生産者は国際価格上昇を予想するので作付面積を増加させる。また、南半球の生産者は5月から6月に（冬）小麦の播種を行うので、北半球の生産者の作付け状況と需給予測（期待価格）を勘案して作付面積を決定することになるだろう。北半球での春小麦の収穫時期は8月から10月、南半球での収穫時期は10月から1月なので、ここでいう短期とは、ほぼ半年ということになる。

現実の国際価格の変化はさまざまな要因によって決まるので、他の要因をコントロールして輸

	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	Jul.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jan.
Ukraine Winter Wheat		Seeding										Harvesting						
Ukraine Spring Wheat									Seeding				Harvesting					
USA Winter Wheat		Seeding										Harvesting						
USA Spring Wheat									Seeding				Harvesting					
Canada Spring Wheat									Seeding				Harvesting					
Argentina										Seeding							Harvesting	
Australia										Seeding							Harvesting	

図6 小麦の作付け体系

出所：農水省資料（「クロープカレンダー」）より抜粋

出減少の効果を見るために、標準的な静学 GTAP モデル⁶を用いて比較静学を行う。このモデルは、消費者および生産者の主体均衡と財および生産要素市場の均衡を仮定する。効用関数および生産関数は、Constant Difference Elasticity 型効用関数、付加価値を農地、労働、資本間の Constant Elasticity of Substitution 型集計関数とし、中間投入と付加価値を Leontief 型で集計する標準的なネスト構造を有する生産関数として特定化されている。穀物の国際需給を対象とする場合には在庫も考える必要があるが、Euler 方程式を組み込むことでモデルが複雑になるため、この研究では捨象した。長期の評価については、ウクライナの小麦輸出のみ外生化するシナリオ、短期の評価については、ウクライナの小麦輸出とそれぞれの国の小麦生産量を外生化するシナリオとした⁷。いずれのシナリオでも、ウクライナの小麦輸出を2割削減⁸するものとする。

使用するデータはバージョン 10A である。データの集計は、中国、EU、インド、ロシア、アメリカ、カナダ、オーストラリア、ウクライナ、トルコ、アルゼンチン、日本、台湾、インドネシア、エジプト、その他南米、中東諸国、サブサハラ、その他世界の計18カ国・地域、小麦、他の穀物、畜産、採取・採掘産業、食料品、製造業、サービス業の7部門、生産要素は農地、労働、資本の3要素とした。

シミュレーション結果は下記の通りである。表1は国際価格の変化についてまとめたものである。小麦の国際価格は長期的には約0.1%の上昇が示唆されるが、これはほとんど価格が変化しないことを示している。GTAP モデルでは、それぞれの国・地域の農地面積は一定でありこれが耕種作物の特殊生産要素と想定しているため、耕種作物間で農地の再配分が起こっているからである。すなわち、生産物価格の上昇した小麦の作付けが増えて他の耕種作物への耕地配分が調整された結果である。現実的には、気温や降水量分布などの自然条件があるので、農地の耕種間配分がモデルで想定されているようにスムーズに進むわけではないことに注意すべきである。また、

表1 国際価格の変化

(PW)	基準 (Index)	国際価格の変化	
		Sim 1 (%)	Sim 2 (%)
Wheat	1.000	0.09	25.69
Other Crops	1.000	0.00	0.36
Livestocks	1.000	0.00	0.48
Extraction	1.000	0.00	-0.03
Food Proccesing	1.000	0.00	0.70
Manufactures	1.000	0.00	-0.01
Services	1.000	0.00	0.00

出所：著者によるシミュレーション結果

⁶ GTAP モデルについては Hartel ed. (1997)、Corong et al. (2017)、および GTAP のウェブサイト (<http://www.gtap.agecon.purdue.edu/>) を参照のこと。

⁷ Closure については補論2を参照。

⁸ 5割削減という想定の方が現実的だが、均衡解が得られなかったため20%削減とした。

短期的には、小麦の国際価格が約26%上昇する。GTAPモデルは1年間のフローデータをベースにしているので、この結果は1年間の変化を示している。これを月次データに戻す⁹と約1.9%となる。それぞれの国・地域での小麦価格の変化をまとめたものが表2である。上昇率は国・地域によって多少ばらつきがあるが、23.6%から27.4%の間に分布するようである。小麦の生産量が変化しないような期間を短期と定義したが、価格変化の国際間波及もモデルが想定するほど単純なものではない。

図7は小麦の貿易構造の模式図である。世界全体で、 n 国を想定し、輸送費や国境措置（政策）は捨象している。それぞれの国・地域の小麦需要は、国内産への需要と輸入需要に分けられる。さらに、輸入需要はすべての国からくまなく輸入されるわけではなく、いくつかの国から集中的に輸入される傾向がある。第 j 国の輸入需要関数を明示的に記すと

$$D_j = D_j(D_j^d, D_j^m(D_{1j}, \dots, D_{j-1,j}, D_{j+1,j}, \dots, D_{n,j}; \sigma_j^m); \sigma_j^d)$$

のようになる。但し、 σ_j^d は国産品と輸入品の代替弾力性（マクロの代替弾力性）、 σ_j^m は輸入先間の代替弾力性（ミクロの代替弾力性）である。通常は、ホームメイドバイアスを考慮して、

表2 国内価格の変化

(PM)	基準 (Index)	国内価格の変化		小麦の国内生産量
		Sim 1 (%)	Sim 2 (%)	Sim 1 (%)
China	1.000	0.002	25.0	0.01
EU_28	1.000	0.056	25.6	0.61
India	1.000	0.016	25.2	0.08
Russia	1.000	0.144	27.4	0.50
USA	1.000	0.055	27.3	0.40
Canada	1.000	0.044	27.3	0.53
Australia	1.000	0.089	27.4	0.52
Turkey	1.000	0.012	26.6	0.14
Argentina	1.000	0.010	27.4	0.07
JAPAN	1.000	0.014	24.2	0.11
Taiwan	1.000	0.019	25.7	0.17
Indonesia	1.000	0.052	23.9	0.30
Egypt	1.000	0.095	23.7	0.74
LatinAmer	1.000	0.014	24.9	0.10
MENA	1.000	0.033	23.6	0.33
SSA	1.000	0.036	23.7	0.52
ROW	1.000	0.063	26.9	0.25

出所：著者によるシミュレーション結果

⁹ $(1+g)^{12} = 1.26$ より、 $g = 0.019$ を得る。クロープカレンダーで検討したように半年で調整可能と想定すると、1ヶ月あたり約4%の上昇率となる。

	輸入国 1	輸入国 2	...	輸入国 n	
輸出国 1	$D_{11}(P_1, \dots, P_n)$	$D_{12}(P_1, \dots, P_n)$...	$D_{1n}(P_1, \dots, P_n)$	$S_1(P_1)$
輸出国 2	$D_{21}(P_1, \dots, P_n)$	$D_{22}(P_1, \dots, P_n)$...	$D_{2n}(P_1, \dots, P_n)$	$S_2(P_2)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
輸出国 n	$D_{n1}(P_1, \dots, P_n)$	$D_{n2}(P_1, \dots, P_n)$...	$D_{nn}(P_1, \dots, P_n)$	$S_n(P_n)$
	$D_1(P_1, \dots, P_n)$	$D_2(P_1, \dots, P_n)$...	$D_n(P_1, \dots, P_n)$	

図7 小麦貿易の構造

出所：著者作成

$\sigma_j^d < \sigma_j^m$ と仮定される¹⁰ことが多い。輸入需要関数にはすべての輸入先が含まれているが、輸入先がいくつかの国に集中しているのが実態である¹¹。ミクロの弾力性の大きさにもよるが、短い時間をとると、ミクロの代替弾力性はかなり小さいことが予想される。スポット市場での調達に時間がかかるからである。スポット市場での取引が成立するとそれが国際間にも波及する。スポット市場での価格上昇はやがて、契約価格にも反映されることとなる。このような一連の波及プロセスの収束状態が、短期の価格変化として計算されている。長期と比べ、短期では大きな価格変化が示されている。設定されている輸入の諸弾力性の大きさにも依存するが、モデルのなかで在庫の影響を捨象しているからであろう。表3は、ウクライナの輸出量と世界の期首在庫の比率を示したものである。2021年の比率は6.5%、2015年から2021年の平均を見ると6.7%程度である。ウクライナの小麦輸出20%は期首在庫の1.3%に相当しており、もし輸入減少分について在庫を保有する国々が在庫放出で対応することが可能であれば、少なくとも短期的には国際価格にそれほど大きな影響はないのかもしれない¹²。もちろん、侵攻が短期間で終了するか長期に亘るのかという期待形成が現実経済に及ぼす影響を否定するものではない。

表4には、それぞれの国・地域の小麦生産量の変化をまとめた。第一列は基準年次の生産量である。単位が百万米ドルとなっている。これは、応用一般均衡分析では基準年次の経済取引を金額ベースで表したフローデータに基づいてモデルが構築されるが、取引金額を価格データと数量データとに区別するために、基準年次の価格をすべて1と設定するためである。基準年次において1米ドルの価値を生み出す量を1単位と定義した数量指数である。基準年次の生産構造を反映

10 GTAP モデルではすべての国・地域での弾力性が同一で、 $\sigma^m = 2\sigma^d$ (2倍ルール) と設定されている。

乳製品を対象に2倍ルールの妥当性について検討した研究に佐藤・齋藤 (2019) がある。

11 UN Comtrade で小麦の貿易マトリックスを作成すると、輸入国がいくつかの国にほぼ集中していることを確認することができる。

12 図1によると近年の期首在庫率は比較的高いので、物量的には在庫を切り崩してウクライナの小麦輸出減少分を補うことは可能であるが、諸国家を含め備蓄を持っている主体が在庫放出について個々の備蓄目的を離れて協調することが前提となる。現時点で小麦に関してこのような機関は存在しない。コメに関しては、ASEAN + 3 緊急コメ備蓄 (Asean Plus Three Emergency Rice Reserve) がある。緩衝備蓄は一種の市場介入でありディスターションの原因となるが、APTERR は緊急時に「必要量」を確保するためのしくみであり、WTO ルールに準拠する形で市場価格には影響を及ぼさないよう工夫されている。APTERR については、<https://www.apterr.org/> を参照のこと。

して、それぞれの国・地域の生産増加率にばらつきが生じている。モデルにはウクライナも含まれているが、輸出を人為的に外生化しているために、生産量の変化は示していないが、基準年次の生産量が34億9700万米ドル、生産量の減少が5億5748万米ドル（-15.9%）と計算された。

表3 ウクライナの輸出・世界の期首在庫比率 (mil. MT, %)

	World Beginning stock	Ukraine Export	Export beginning stock ratio
2015	225.1	17.4	7.7
2016	247.3	18.1	7.3
2017	266.3	17.8	6.7
2018	285.8	16.0	5.6
2019	282.5	21.0	7.4
2020	298.2	16.9	5.7
2021	291.6	19.0	6.5

出所：PS & D (ERS/USDA) に基づき著者作成

表4 小麦生産量の変化

(PM)	基準		国内生産量の変化 (Sim1)	
	生産量 (million USD)	シェア (%)	生産量 (million USD)	変化率 (%)
China	47,725.2	0.22	4.1	0.01
EU_28	27,521.7	0.12	168.1	0.61
India	18,846.6	0.09	15.0	0.08
Russia	10,257.0	0.05	51.3	0.50
USA	10,918.2	0.05	43.3	0.40
Canada	8,445.6	0.04	44.9	0.53
Australia	7,164.8	0.03	37.5	0.52
Turkey	6,538.8	0.03	9.5	0.14
Argentina	2,021.8	0.01	1.4	0.07
JAPAN	305.3	0.00	0.3	0.11
Taiwan	5.6	0.00	0.0	0.17
Indonesia	31.3	0.00	0.1	0.30
Egypt	5,905.6	0.03	43.9	0.74
LatinAmer	5,527.4	0.02	5.4	0.10
MENA	26,305.8	0.12	85.5	0.33
SSA	2,456.1	0.01	12.7	0.52
ROW	37,895.5	0.17	95.6	0.25

出所：著者によるシミュレーション結果

6. まとめ

本論文では、昨年2月に勃発したロシアによるウクライナ侵攻がフード・セキュリティに及ぼす影響について、特に小麦の国際価格へ及ぼす影響について検討した。検討内容のほとんどは2022年7月時点のものであり、現時点でも侵攻が終息する見通しは立っていない。ロシアによるウクライナ侵攻のような偶発的危機が起こりうる可能性は極めて低くほとんど起こりえないと信じていたが、この信念が必ずしも正しいものではないこと、確率が低いといってリスクを過小評価すべきではないという教訓が得られたと思う。

小論では小麦価格に焦点を当てたが、開発途上国の低所得者層にとって小麦の国際価格上昇はフード・セキュリティに大きな影響を及ぼす一方で、自給分を超える穀物生産を行っている農家にとっては生産物価格の上昇を通して所得を増加させること、小麦価格高騰の影響を緩和させることが可能であることも示した。

ウクライナの小麦輸出量減少のシミュレーションでは短期と長期に分けた考察を行い、短期的には価格が大きく増加するものの、長期的には価格上昇にともない生産者が増産するため、ほとんど価格が上昇しないことを明らかにした。これは、価格メカニズムがフード・セキュリティに貢献しうることを示すものである。

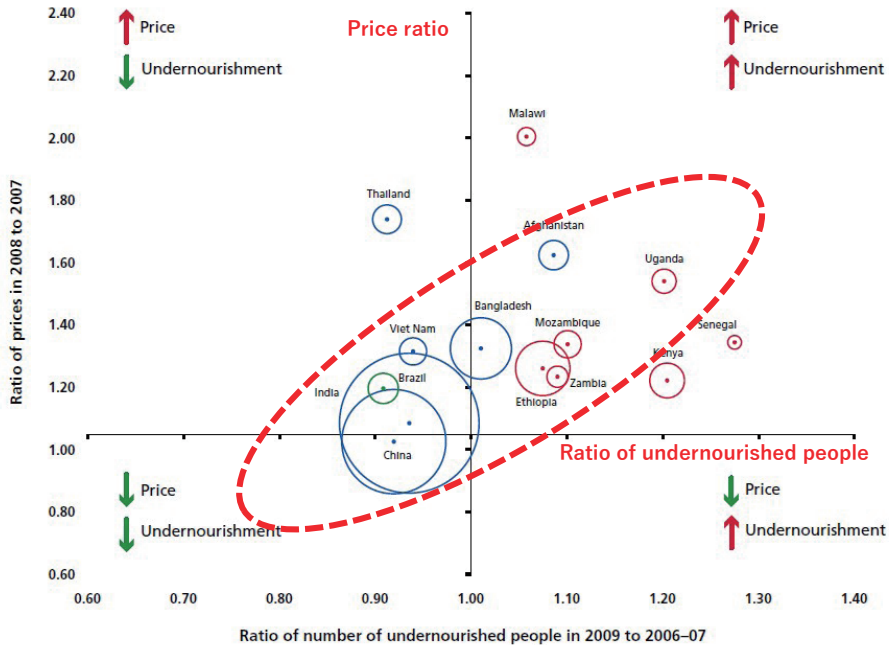
小論では小麦価格に焦点を当てたが食料に限らずエネルギー価格への影響も甚大であり、この点を評価すること、紛争勃発後の価格の動きを統計モデルで評価すること、在庫調整を組み込み緩衝在庫の役割を評価することは今後の課題としたい。

参考文献

- 齋藤之美・齋藤勝宏・佐藤秀保「収量変動とコメの国際価格について」創価経済論集、第47巻、2018年、39-53
- 佐藤秀保・齋藤勝宏「日本における乳製品需要の計量経済分析—「ミクロ」と「マクロ」の代替の弾力性の推定—」農業経済研究 91(1)、2019年、71-76
- 清水徹朗「ロシア・ウクライナの農業・食料—ソ連崩壊後の変化と今後の見通し—」農林金融 2010年3月号、120-137
- 農林水産省「輸入小麦の政府売渡価格について」令和4年3月 <https://www.maff.go.jp/j/press/nousan/boeki/attach/pdf/220309-1.pdf>
- 農林水産省「クロップカレンダー」 https://www.maff.go.jp/j/zyukyu/jki/j_rep/annual/2014/pdf/ref_3_2.pdf
- 樋口修「2022年の穀物価格高騰とその背景」調査と情報 No.1201、2022年 https://dl.ndl.go.jp/view/download/digidepo_12315652_po_1201.pdf?contentNo=1
- 山村理人「ウクライナ農業：ポストソ連期の構造変動と政策展開」農林水産省『主要国の農業情報調査分析報告書（平成18年度）』2006年、39-72 https://www.maff.go.jp/j/kokusai/kokusei/kaigai_nogyo/k_syokuryo/h18/
- Burfisher, Mary, *Introduction to Computable General Equilibrium Models* 3rd edition, Cambridge University Press, 2021.
- Corong, Erwin L., Tomas W. Hartel, Robert A. McDougall, Marinos E. Tsigas and Dominique, Van Der Mensbruggghe, “The Standard GTAP Model Version 7”, *Journal of Global Economic Analysis* 2(1), 2017, 1-119.
- Hartel, Tomas ed., *Global Trade Analysis: Modeling and Applications*, Cambridge University Press 1997.
- EPRS, AT A GLANCE, *Russia's war on Ukraine: Impact on food security and EU response*, European Parliamentary Research Service, April. 2022. [https://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/ATAG/2022/729367/EPRS_ATA\(2022\)729367_EN.pdf](https://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/ATAG/2022/729367/EPRS_ATA(2022)729367_EN.pdf)
- FAO, World Food Situation, <https://www.fao.org/worldfoodsituation/foodpricesindex/en/>
- Hausman, Catherine and David S. Rapson, “Regression Discontinuity in Time: Considerations for Empirical Applications”, *Annual Review of Resource Economics* 10, 2018, 533-552.
- Mottaleb, Khondoker Abdul, Gideon Kruseman and Sieglinde Snapp, “Potential impacts of Ukraine-Russia armed conflict on global wheat food security: A quantitative exploration”, *Global Food Security* 35, 2022, <https://doi.org/10.1016/j.gfs.2022.100659>
- United Nation, Comtrade Database, <https://comtrade.un.org/>
- USDA, PSD. <https://apps.fas.usda.gov/psdonline/app/index.html#/app/downloads>
- World Bank, Commodity Markets, <https://www.worldbank.org/en/research/commodity-markets>.

補論1 穀物価格上昇とフード・セキュリティ

穀物価格上昇とフード・セキュリティの関係について2008年の食料危機を例に挙げ確認する。附論図1はFAO「世界食料農業白書2011年版」から引用したものである。縦軸は2008年と2007年の価格比率であり価格上昇率を、横軸は2009年と2007年の栄養不足人口の比率を表している。それぞれの国のデータがプロットされているが、その分布を見ると右上がりの正の相関が見られる。この図をもって因果関係を主張するものではないが、第一象限に現れている国々をみると発展途上国でありこれらの国々では低所得者が多いことを考慮すると、穀物価格の上昇がフード・セキュリティと深く結びついていることを否定することはできない¹³。なかには、穀物価格が上昇するにもかかわらず栄養不足人口が減少している国もあるが、これは穀物価格上昇に対して政府が何らかの対策を講じている場合などグラフには現れていない条件があるためである。



Notes: The size of the bubbles is proportional to the number of undernourished in 2008. African countries are shown in red, Asian countries in blue and Latin American countries in green. Prices used are inflation-adjusted retail prices of major staple foods in main markets, weighted by the population of each market and the share in energy intake of each staple food. Source of raw data: FAO.

附論図1 穀物価格上昇と栄養不足人口の関係

出所：FAO The State of Food Insecurity in the World 2011 より引用

13 途上国の農民は所得水準が低いと言われているが、自家消費以上の穀物を生産できるほど規模の大きな家計は、穀物価格の上昇により所得が増えるため、厚生が改善していることには注意しておく必要がある。

補論2 シミュレーションで設定した closure

シミュレーションで用いた closure は標準的な closure に下記を加えている：

SIM1: long run

```
swap tx("Wheat", "Ukraine") = qxw("Wheat", "Ukraine");
```

SIM2: short run

```
swap aoall("Wheat", REG) = qo("Wheat", REG);
```

```
swap tx("Wheat", "Ukraine") = qxw("Wheat", "Ukraine")
```

創価大学経済学会会則

- 第1条 本会は創価大学経済学会と呼ぶ。
- 第2条 本会は経済学およびこれに関連する諸科学の研究および教育の促進を目的とする。
- 第3条 本会は次の事業を行なう。
1. 研究会の開催
 2. 機関誌の発行
 3. その他本会の目的を達成するために適当な事業
- 第4条 本会の会員は、次の4種類とする。
1. 正会員 本学の教授、准教授、専任講師および助教、なお創価女子短期大学の教員で入会を希望し総会の承認をえた者
 2. 準会員 本会正会員経験者で総会の承認をえた者
 3. 賛助会員 本会の趣旨に賛同し、総会の承認をえた者
 4. 学生会員 本学の大学院経済学研究科経済学専攻の学生で、入会を希望し総会の承認をえた者
- 第5条 機関誌の発行にあたっては、掲載・編集規定に従う。
- 第6条 会員は各種の会合に出席することができる。
- 第7条 会員は所定の会費を納めなければならない。
- 第8条 通常総会は毎年春1回、臨時総会は必要に応じ、会長がこれを招集する。
- 第9条 総会は正会員の過半数によって成立し、出席者の過半数によって決議される。
- 第10条 本会を運営するため、経済学部長を会長とし、委員若干名からなる委員会をおく。
- 第11条 委員は正会員の中からこれを互選する。委員の任期は2年とし、再選を妨げない。ただし、連続した再任期間は4年を超えないものとする。
- 第12条 委員会は毎年度の事業計画および実績報告書、ならびに会計予算書および決算書を総会に提出し、承認をえなければならない。
- 第13条 委員会は、第3条の事業に必要な事業を行なう。会長は委員会を統轄し、本会を代表する。
- 第14条 本会の会計を監査するため、委員以外の正会員の中から監事を選出する。
- 第15条 監事の任期は1年とし、再選を妨げない。
- 第16条 この会則の実施に関し、必要な細目は別に総会の承認をえてこれを規定する。
- 第17条 この会則および諸規定の改廃は総会の決議にしたがう。

付 則

- 第1条 本会の事務所を創価大学経済学部内におく。
- 第2条 本会の会計年度は4月1日に始まり、翌年3月31日に終わる。
- 第3条 この会則は昭和46年9月22日よりこれを実施する。
- 第4条 一部改正 昭和49年5月24日。
- 第5条 一部改正 昭和59年4月27日。
- 第6条 一部改正 昭和60年4月19日。
- 第7条 一部改正 昭和63年4月15日。
- 第8条 一部改正 平成5年5月21日。
- 第9条 一部改正 平成7年11月10日。
- 第10条 一部改正 平成16年5月14日。
- 第11条 一部改正 平成29年5月19日。

規定第3号

- 第1条 本会の会費は正会員年額20,000円、準会員年額10,000円、賛助会員1口年20,000円、学生会員のうち大学院生前期課程5,000円（2年分）、後期課程7,500円（3年分）とする。

創価大学経済学会正会員（五十音順）

Edwin ALOIAU	杉 本 一 郎
浅 井 学	◎高 木 功
石 井 健 司	近 貞 美津子
石 井 秀 明	蝶名林 俊
◎碓 井 健 寛	○寺 田 和 之
○小 島 健	△寺 西 宏 友
掛 川 三千代	西 浦 昭 雄
○金 澤 伸 幸	西 田 哲 史
KARKI Shyam Kumar	馬 場 善 久
加 納 直 幸	フヤル モハン
勘 坂 純 市	○増 井 淳
神 立 孝 一	安 武 妙 子
小 林 孝 次	山 崎 勝
齋 藤 之 美	
坂 本 幹 雄	
佐久間 貴 之	

◎印は会長
◎印は編集委員長
○印は編集委員
△印は監事

季刊 創価経済論集 第52巻 第1・2・3・4号

2023年3月31日 発行

編集・発行人

創価大学経済学会

東京都八王子市丹木町1-236

(042) 691-2211 (代)

会長 高木 功

編集委員長 碓井 健 寛

印刷

株式会社 紀伊國屋書店



THE SOKA ECONOMIC STUDIES QUARTERLY

THE SOKA ECONOMIC STUDIES: VOL. LII NO. 1·2·3·4/MARCH 2023

Articles

- Asset Pricing and Overlapping Generations Kunio KAMA (1)
- Numerical Analysis of Economic Models Using Relaxation Method Kunio KAMA (15)
- Impacts of Russian Invasion of Ukraine on International Price of Wheat
..... Konomi SAITO and Katsuhiro SAITO (27)