世代重複モデルの数値解析 (2)
（計算経済学の研究その 22）
Numerical Analysis of the Overlapping Generations Models (Part 2)

釜　　国男*
Kunio KAMA

世代重複（OLG）モデルは年齢やライフサイクルステージの違いなどの異質性に注目したモデルである。最も簡単な２期間モデルは、若年層と老年層の２世代から構成される。Allais（1947）が最初にこのタイプのモデルを考案し、Samuelson（1958）は不換紙幣の役割を説明するのに用いた。OLG モデルでは市場均衡はパレート効率的とならず、厚生経済学の基本定理は成立しない。このため社会計画問題に置き換えて均衡解を求める方法は適用できない。また一般的な条件の下で競争均衡の一意性も保証されない。世代重複モデルは財政問題など現実の問題にも応用されている。Auerbach and Kotlikoff（1987）は多期間モデルを用いて国債と税負担の関係を世代別に推計した。そこで導入された世代会計は人口構成の変化が財政に及ぼす影響を見るのに役立つ。OLG モデルはソローやラムゼイと並ぶマクロ経済学の重要なモデルでありながら、これまで本格的な数値解析はほとんど行われていない。複雑な構造のために大量の計算が必要となるからである。最も簡単な２期間モデルには解析解があるが、景気変動や経済成長の分析には使えない。これまで試みられたのは少数世代の離散時間モデルである。しかし連続時間にすれば多くの世代を含むことが可能である。しかも Achdou 他（2017）の開発したアイヤガリモデルのコンピュータプログラムを転用できる。先に発表した拙稿（2021）では紙幅の関係で計算結果の詳細は省略した。本稿ではより詳しい結果と若干の新しい結果を報告する。最初に所得が外生的に与えられた交換経済を取り上げる。つぎに企業と公的年金を加えて生産経済に拡張する。最後に労働供給を内生化したモデルについて検討する。

１．モデルの構造

連続時間型の世代重複モデルについて考える[1)]。各世代の人口は一定で、全人口は１とする。消費者は T 年間生存し、ある年における年齢を t、資産を a_t、所得を y_t、消費を c_t と記す。所得は外生的に与えられている。第０世代は親から資産を譲り受ける。はじめに消費者の行動を分析しよう。消費者は予算制約のもとで生涯の期待効用を最大化する。

* 創価大学名誉教授

$$\max_{\{c_t\}\geq 0} E_0\left[\int_0^T e^{-\rho t}u(c_t)dt + e^{-\rho T}\phi(a_T)\right] \tag{1}$$

$$s.t.\ \ da_t = (y_t + ra_t - c_t)dt$$

$$dy_t = \mu(y_t)dt + \sigma(y_t)dW_t,\ \ y_t \in [y_1, y_2]$$

$$a_t \geq 0,\ \phi(a_T) > 0$$

ここで $\phi(a_T)$ は遺産の効用を表し、$\rho \geq 0$ は主観的割引率である。ベルマンの動的計画法を適用すると、HJB 方程式は

$$\rho V(a,y,t) = \max_c \left\{u(c) + V_a(a,y,t)(y+ra-c) + V_y(a.,y,t)(\theta(\mu-y)) + \frac{\sigma^2}{2}V_{yy}(a,y,t) + V_t(a,y,t)\right\} \tag{2}$$

と表される。最適消費の条件は

$$u'(c) = V_a(a,y,t) \tag{3}$$

である。消費は資産と所得および年齢で決まり、$c(a,y,t)$ と表す。貯蓄は

$$s(a,y,t) = y + ra - c(a,y,t)$$

で与えられる。T 歳では

$$V(a,y,T) = \phi(a_T) \tag{4}$$

となる。$a \geq 0$ の制約によりつぎの条件を満たす必要がある。

$$V_a(0,y,t) \geq u_c(y) \tag{5}$$

資産は任意の非負の値を取り得るが、計算の都合上、$a \leq a_{\max}$ と上限を設ける。このため

$$V_a(a_{\max},y,t) \leq u_c(y + ra_{\max}) \tag{6}$$

という条件を加える。所得の上限と下限では

$$\partial_y V(a,y_1,t) = 0 \tag{7}$$

$$\partial_y V(a,y_2,t) = 0$$

とする。

所得はつぎの算術ブラウン運動に従う。

$$dy_t = \theta(\mu - y_t)dt + \sigma dW_t \tag{8}$$

$\theta > 0$ であり所得は平均 μ に戻る性質がある。t 歳のときの所得と資産の分布を $g(a,y,t)$ とすると、つぎのコルモゴロフ方程式が成り立つ。

$$g_t(a,y,t) = -\partial_a(s(a,y,t)\ g(a,y,t)) - \partial_y(\theta(\mu-y)\ g(a,y,t)) + \frac{\sigma^2}{2}g_{yy}(a,y,t) \tag{9}$$

分布関数は規格化条件

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_0^\infty g(a,y,t)da\,dy = 1 \tag{10}$$

も満たさなければならない。第0世代と最終世代については

$$g(a, y, 0) = g(a, y, T)$$

となり状態変数の分布は等しくなる。

競争均衡を解析的な方法で求めることは難しい。このため差分法を用いて数値解を求めた。資産と所得を a_i, $i = 1,...,I$ と y_j, $j = 1,...,J$ で離散化し、年齢を t_n, $n = 1,...,N$ で近似して、(2) の HJB 方程式を

$$\rho V_{i,j}^n = u(c_{i,j}^{n+1}) + (V_{i,j}^n)'[y_j + r\ a_i - c_{i,j}^n] + \theta(\mu - y_j)(V_{i,j}^n)' + \frac{\sigma^2}{2}(V_{i,j}^n)'' + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t}$$

によって近似する。この式は

$$\rho V^n = u^{n+1} + A^{n+1} V^n + \frac{1}{\Delta t}(V^{n+1} - V^n) \tag{11}$$

と表される。(4) を初期条件として、時間を逆向きにして各世代の value function を求める。t_n 世代の資産と所得の分布を $g_{i,j}^n$ で近似すると、(9) から

$$\frac{g^{n+1} - g^n}{\Delta t} = (A^n)^T g^{n+1}$$

が成り立つ。これより

$$g^{n+1} = (I - \Delta t\ (A^n)^T)^{-1}\ g^n \tag{12}$$

となる。こんどは時間を正の方向に進めて $g_{i,j}^n$ を求める。ただし初期値を $g_{i,j}^0 = g(a_i, y_j, 0)$ とする。t 世代の資産は

$$A(t) = \frac{1}{T}\int_{y_1}^{y_2}\int_0^{\infty} ag(a, y, t)dady$$

で与えられる。利子率は貯蓄を通じて資産と所得の分布を変える。このため $A(t)$ は利子率の関数となり、全世代の資産

$$D(r) = \int_0^T A(t)dt \tag{13}$$

も利子率の関数となる。経済全体で S の資産が存在すると、資産市場の均衡条件は

$$D(r) = S \tag{14}$$

と表される。

競争均衡は (2),(9),(14) 式を満たす $V(a, y, t)$, $g(a, y, t)$, r によって定義される。数値計算ではつぎの効用関数を用いる。

$$u(c) = -\frac{1}{c}$$

$$\phi(a_T) = 0.3\log(0.001 + a_T)$$

つぎの手順で数値解を求めた。

［ステップ１］利子率の初期値 $r = r^0$ と第0世代の資産と所得の分布を設定する。

［ステップ２］(11) と (12) 式から $V_{i,j}^n$ と $g_{i,j}^n$ を計算する。

［ステップ３］総資産

$$S^{new} = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_i g_{i,j}^n \Delta t \Delta a \Delta y$$

を求めて $|S^{new} - D| \leq \varepsilon$ であれば終了する。そうでなければ

$$\mathrm{r}^{new} = r - 0.007 \times \left(S^{new} - 1\right)$$

により利子率を更新してステップ２へ戻る。

良い初期値から始めると数回反復しただけで収束し、世代数が増えても計算時間はあまり変わらない。

２．計算結果

計算にあたってモデルのパラメータを $T = 80, \rho = 0.05, \theta = 0.8, \mu = 1, \sigma = 0.2$ とした。所得と資産を $0.5 \leq y \leq 1.5$, $0 \leq a \leq 10$ の区間にとり、それぞれ $I = 100, J = 30$ の分点で近似する。資産に対する需要は $D = 1$ とする。$\Delta t = 0.5$ であり 160 世代が含まれる。最初に均衡利子率の決定を図示しよう。図1の横軸は利子率で、縦軸には資産の需要と供給をとっている。右上がりの曲線は資産の需要曲線である。需要曲線は S = 1 の直線と１点で交わる。交点の横座標が均衡利子率である。計算結果によると均衡利子率は $r^* = 4.67\%$ となり、主観的割引率より低くなる。図2は50歳の

図１　均衡利子率の決定

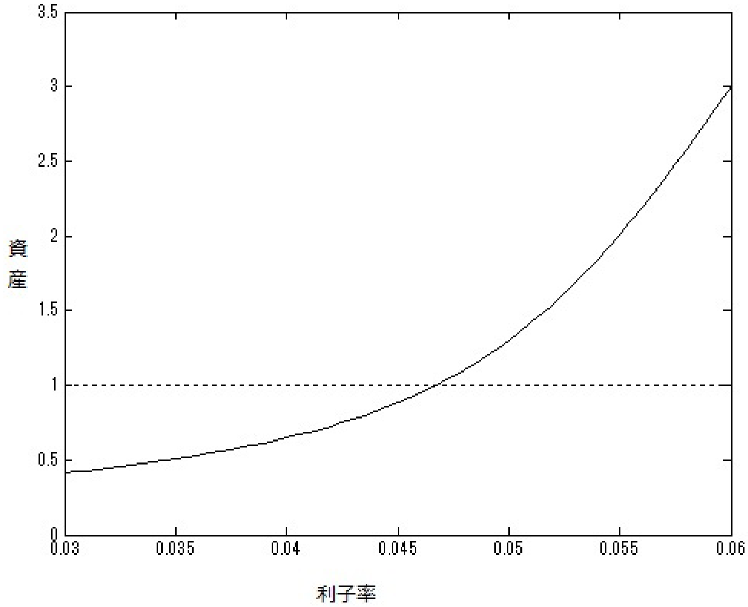
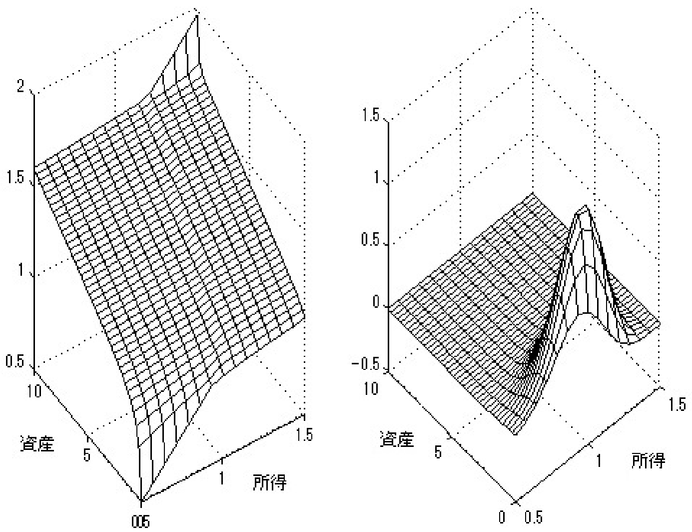


図２ 消費の決定式と資産・所得の分布



消費者について消費の決定式と資産・所得の分布を示している[2)]。消費は資産と所得の増加関数であり、とくに資産の影響が大きい。他の年代でも同様の関係が見られる。右図によると資産の分布は [0,5] の区間に集中しており、ジニ係数は 0.36 と低い。パラメータの値を変えると利子率は変化する。とくに割引率の影響が大きい。例えば $\rho = 0.1$ とすると、均衡利子率は $r^* = 9.55\%$ と高くなる。貯蓄意欲の低下によって需要曲線が下方へシフトするからである。また $\sigma = 0.4$ とすると、利子率は $r^* = 3.80\%$ と低くなる。所得リスクが高くなり貯蓄が増加するからである。消費のライフサイクル理論によると、消費者は若年期に貯蓄して老齢期には貯蓄を取り崩す。計算結果によると、世代別の貯蓄は 50歳までプラスで、その後はマイナスとなる。したがって貯蓄の変動パターンはライフサイクル理論と整合的である。このような貯蓄の動きを反映して、世代別の資産は 50歳まで増加したあと減少に転じる[3)]。

３．生産活動を含む場合

前節では交換経済の OGM モデルについて検討した。本節では生産活動を含むようにモデルを拡張する。消費者は 60歳になるまで働き、定年で退職して 80歳まで公的年金を受け取る。代表的企業は資本と労働を用いて生産を行う。現役世代は１単位の労働を供給して所得税を納める。労働生産性 z_t はつぎの確率過程に従う。

$$dz_t = \theta(\mu - z_t)dt + \sigma dW_t,\ \ z_t \in [z_1, z_2]$$

退職前と退職後で予算制約式は異なる。退職前は

$$da_t = ((1 - \tau)w_t z_t + r_t a_t - c_t)dt \tag{15}$$

である。ここで τ は所得税率を表し、w_t は実質賃金である。退職後は

$$da_t = (r_t a_t + b - c_t)dt$$

となる。b は現役時の賃金と無関係に支給される公的年金である。現役世代から徴収した税金が年金の財源にあてられる。年金の所得代替率を p として $\tau = p/3$, $b = pw$ とすれば、$b = 3\tau w$ となり税収と支出は等しくなる。所得代替率を $p = 0.5$ に固定して、賃金にスライドして年金額を調整する方式を採用する。現役世代の消費は資産と労働生産性の関数となるが、退職すれば消費は資産だけで決まる。

代表的企業は利潤を最大化する。利潤最大化条件は

$$w = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$$

$$r = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} - \delta$$

である。生産関数を $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ とすると

$$w = A(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} \tag{16}$$
$$r = A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - \delta$$

となる。60歳で退職するので $L = 2/3$ である。

資本市場の均衡条件は

$$K = \frac{1}{T}\int_0^T\int_{z_1}^{z_2}\int_0^{\infty} ag(a,z,t)dadzdt \tag{17}$$

と表される。定常状態では資産と労働生産性の分布は変わらない。このため総資産と賃金、および利子率は一定となる。以下の手順で数値解を求めた。

［ステップ１］第０世代の資産と生産性の分布、および総資産と賃金、利子率の初期値を設定する。

［ステップ２］$V_{i,j}^n$ と $g_{i,j}^n$ を計算する。

［ステップ３］総資本

$$K^{neq} = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_i g_{i,j}^n \Delta t \Delta a \Delta z$$

を求める。$|K^{new} - K^{old}| \leq \varepsilon$ であれば終了し、そうでなければ

$K^1 = \omega K^{old} + (1-\omega)K^{new}$

とする。(16) 式から賃金と利子率を計算し、第0世代の資産と所得の分布を調整してステップ２へ戻る。

パラメータの値は前節と変わらない。新たなパラメータを $\alpha = 0.3$, $\delta = 0.1$ として、年金の所得代替率は $p = 0.5$ とする。上のアルゴリズムを実行すると、$K^* = 1.982$, $r^* = 5.02\%$, $w^* = 0942$, $b = 0.471$, $\tau = 16.7\%$ となる [4)]。総消費は $C^* = 0.816$ であり、年齢が高くなるほど消費は増加し、とくに70歳を過ぎると急増する。消費のライフサイクル仮説によると最終世代の資産はゼロと

なるはずであるが、$a_T > 0$ となる。資産のジニ係数は年齢とともに低下し、退職すると急激に高くなる。公的年金は可処分所得を通じて様々な影響を及ぼす。表1 は年金の所得代替率を 0.2 ～ 0.6 の間で変化させた場合の結果を示している。所得代替率が引き上げられると、資本の供給は減少して利子率は上昇する。このため資本ストックは減少して実質賃金を低下させる。同時に消費財の生産も少なくなる。公的年金は所得代替率と実質賃金の積に等しい。実質賃金の低下で一部相殺されるが、代替率の引き上げにより年金は増加する。資産に関する世代別のジニ係数はほとんど変わらない。興味があるのは次式で定義した社会的効用である。

$$U_{social} = \frac{1}{T}\int_0^T \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{\infty} u(a,z,t)g(a,z,t)dadzdt$$

社会的効用ははじめ増加したあと減少する。所得代替率を引き上げると現役世代の効用は低下し、退職世代の効用は高くなる。最初は後者の上昇分が前者の低下分を上回るが、代替率が 0.4 前後で両方の関係は逆転する。社会的効用が最大となる代替率を３分割法で求めると、$p = 0.403$ のときに効用は最大となる。多くのマクロ経済モデルで全要素生産性は重要な役割を果たす。全要素生産性が 1 から 1.3 に上昇した場合について計算した。公的年金の所得代替率が 0.4 以下であると利子率は高くなる。しかし代替率が 0.5 より高いと逆に利子率は低くなる。実質賃金、資本ストック、消費、公的年金はいずれも増加する。また資産のジニ係数は若干低くなり、社会的用は高くなる。したがって全要素生産性が上昇すればすべての面で経済パフォーマンスは改善する。

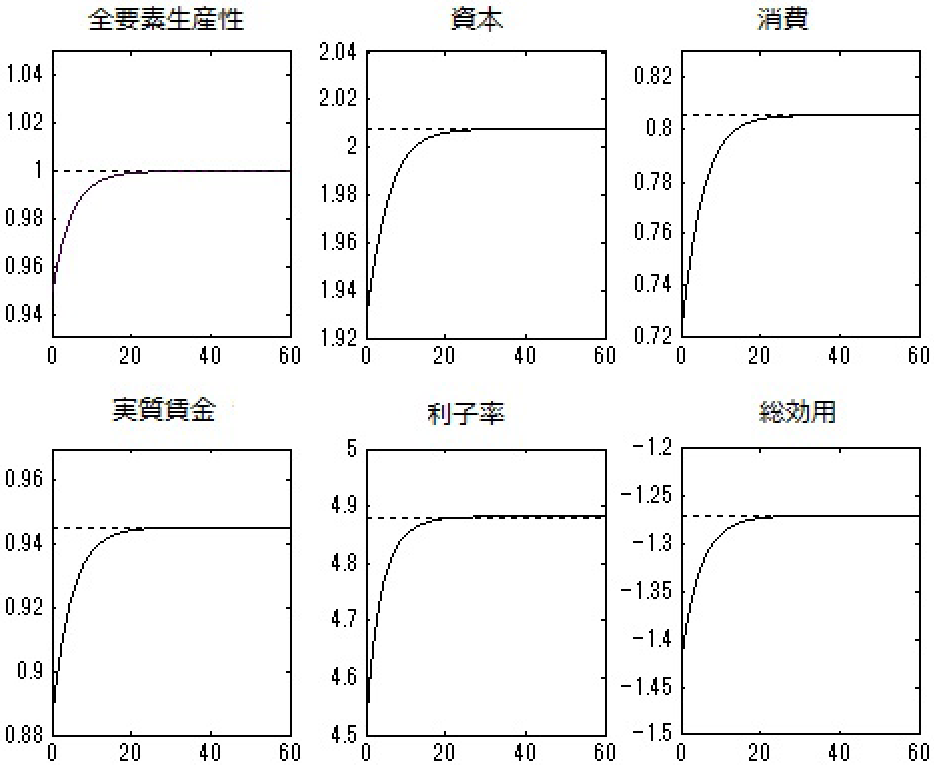
消費のライフサイクル理論では、遺産の効用 $\phi(a) = \eta\log(0.001 + a)$ の係数 η はゼロとなる。$\eta = 0.3$ のかわりに $\eta = 0.03, 0.003$ とすると、最終世代の消費は $C = 0.964, 1.085$ となる。このように遺産の効用が低くなると最終消費はいくらでも大きくなる。(3) の条件により $c^2(a,y,T) = (0.001 + a)/\eta$ となり、$\eta = 0$ であれば $c(a,y,T) = \infty$ と最終世代の消費は無限大となる。これを避けるために $\eta > 0$ とした。

次に生産性ショックが変化した場合について調べてみよう。何かの理由で予想に反して全要素生産性が $A = 0.95$ に低下したとする。その後は

表１　所得代替率と集計量の関係 (1)

所得代替率	利子率	実質賃金	資本	消費	公的年金	ジニ係数	社会的効用
0.20	3.20	0.995	2.382	0.831	0.199	0.295	− 1.268
0.25	3.57	0.984	2.292	0.828	0.246	0.296	− 1.263
0.30	3.91	0.973	2.210	0.825	0.292	0.296	− 1.259
0.35	4.23	0.964	2.141	0.823	0.337	0.295	− 1.257
0.40	4.51	0.956	2.081	0.820	0.382	0.295	− 1.257
0.45	4.77	0.948	2.029	0.818	0.427	0.295	− 1.259
0.50	5.02	0.942	1.982	0.816	0.471	0.295	− 1.262
0.55	5.25	0.936	1.939	0.814	0.515	0.295	− 1.266
0.60	5.46	0.930	1.901	0.812	0.558	0.297	− 1.271

図３　生産性ショックに対するインパルス反応



$$dA(t) = 0.2(1 - A(t))dt \tag{18}$$

にしたがって元の水準へ戻る。60年の期間について資本ストックの初期値を与えて、利子率と実質賃金を求める。そして value function と分布関数を計算して資本ストックを調整する。このような計算を資本ストックの系列が収束するまで繰り返す。図3 は主要な変数のインパルス反応を示している。上段の左図は全要素生産性の動きを表している。生産性ショックの影響で資本ストックは一時的に減少するが、時間とともに元の水準へ戻る。これを受けて総消費と実質賃金も同様の反応を示す。通常利子率は定常値をオーバーシュートするが、この場合は単調に元の水準へ戻る。社会的効用の動きも他の変数と変わらない。図から分かるように、20年程度で経済は元の定常状態へ戻る。

４．労働時間が変化する場合

最後に、労働時間が変化する場合について検討しよう。(1) にかえて効用関数を

$$U = E_0\left[\int_0^T e^{-\rho t} u(c_t, l_t)dt + e^{-\rho T}\phi(a_T)\right] \tag{19}$$

とする。ここで l_t は労働時間を表し、予算制約式は

現役世代：$da_t = ((1-\tau)wz_tl_t + ra_t - c_t)dt$

退役世代：$da_t = (r_ta_t + b - c_t)dt$ (20)

となる。労働生産性はつぎの確率過程に従う。

$$dz_t = \theta(\mu - z_t)dt + \sigma dW_t,\ z_t \in [z_1, z_2]$$

数値計算ではつぎの効用関数を用いた。

現役世代：$u(c,l) = -\frac{1}{c} - \frac{2}{3}l^{\frac{3}{2}}$

退役世代：$u(c,l) = -\frac{1}{c}$

現役世代の HJB 方程式とコルモゴロフ方程式は

$$\rho V(a,z,t) = \max_{c,l}\left\{u(c,l) + V_a(a,z,t)((1-\tau)wzl + ra - c) + V_z(a,z,t)(\theta(\mu - z)) + \frac{\sigma^2}{2}V_{zz}(a,z,t) + V_t(a,z,t)\right\}$$

$$g_t(a,z,t) = -\partial_a(s(a,z,t)g(a,z,t)) - \partial_z(\theta(\mu - z)g(a,z,t)) + \frac{\sigma^2}{2}g_{zz}(a,z,t) \tag{21}$$

となる。最適消費と労働時間の条件は

$u_c(c,l) = V_a(a,z,t)$

$-u_l(c,l) = (1-\tau)wzV_a(a,z,t)$ (22)

である。これらの条件から

$$c = V_a(a,z,t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$l = ((1-\tau)wzV_a(a,z,t))^2$$

となり V_a を消去すると

$$\sqrt{l}c^2 = (1-\tau)wz_i$$

が成り立つ。$s=0$ であれば、$c = (1-t)wzl + ra$ から

$$\sqrt{l}((1-\tau)wzl + ra)^2 = (1-\tau)wz$$

となる。この式から資産の上限と下限における労働時間を求めた。労働時間は資産と生産性の関数であり $\partial l/\partial a < 0$ となる。企業の利潤最大化により

$$w = A(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}$$

$$r = A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - \delta$$

市場均衡条件は (17) 式と

$$L = \frac{1}{T}\int_0^{60}\int_{z_1}^{z_2}\int_0^{\infty} zl(a,z,t)g(a,z,t)dadzdt \tag{23}$$

である。さらに規格化の条件

$$\int_{z_1}^{z_2}\int_0^{\infty} g(a,z,t)dadz = 1 \tag{24}$$

も満たす必要がある。

公的年金の所得代替率を 0.5 とすると均衡利子率は r^* = 4.85%、実質賃金は w^* = 0.946、資本ストックは K^* = 2.143、総労働は L^* = 0.785、税率は τ = 16.7%、公的年金は b = 0.473 となる。労働時間が l = 1 に固定されている場合と比べて資本ストックは増加して利子率は低下する。また総消費は 0.816 から 0.852 に増える。図4 は 50歳のときの労働時間を示している。労働生産性が上昇すると労働時間は長くなり、資産が増えると短くなる。他の年齢でも同様の関係が見られる。世代合計でみると 30歳になるまで労働時間は減少し、その後は退職するまで増加する。

表2 は年金の所得代替率と集計量の関係を示している。所得代替率が引き上げられると利子率は上昇して資本ストックと実質賃金は減少する。一方、労働時間はほとんど変わらない。資本の減少により消費財の生産は縮小し、公的年金は大幅に増加する。資産のジニ係数は低下しないので公的年金は資産格差の是正には無効である。最後の欄によると、代替率を変えても社会的効用はほとんど変化しない。ただし代替率が上がると若年層の効用は低下し老年層の効用は高くなる。

全要素生産性が A = 1.3 に上昇すると、すべての面で経済パフォーマンスは改善する。つまり資本ストックは拡大し、実質賃金は上昇して利子率は低下する。また労働時間は短くなり消費は増える。公的年金は大幅に引き上げられて資産のジニ係数は低下する。この結果、社会的効用はどの所得代替率でも高くなる。

図４　労働時間

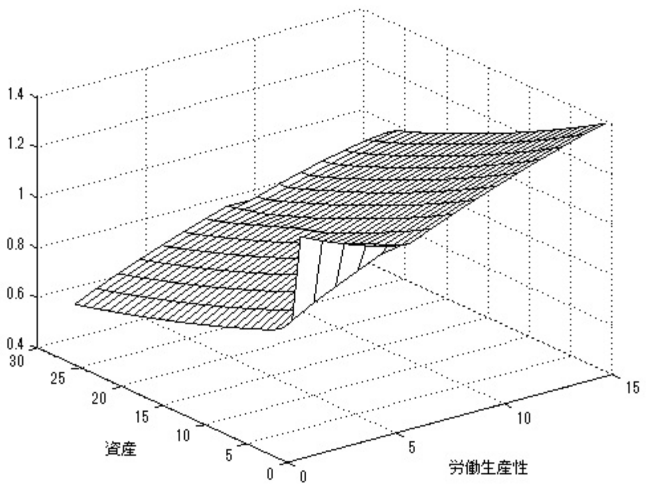


表２　所得代替率と集計量の関係 (2)

所得代替率	利子率	実質賃金	資本	労働供給	消費	公的年金	ジニ係数	社会的効用
0.20	3.57	0.983	2.454	0.790	0.871	0.197	0.320	− 1.736
0.25	3.84	0.975	2.385	0.789	0.868	0.244	0.319	− 1.732
0.30	4.08	0.968	2.323	0.789	0.864	0.290	0.318	− 1.730
0.35	4.30	0.961	2.269	0.788	0.861	0.337	0.317	− 1.729
0.40	4.50	0.956	2.222	0.787	0.858	0.382	0.317	− 1.729
0.45	4.69	0.951	2.180	0.786	0.855	0.428	0.316	− 1.730
0.50	4.85	0.946	2.142	0.785	0.852	0.473	0.317	− 1.731
0.55	5.01	0.942	2.108	0.784	0.849	0.518	0.318	− 1.733
0.60	5.15	0.938	2.076	0.782	0.846	0.563	0.319	− 1.736

５．結語

ミクロ的基礎づけをもつマクロ経済モデルは、ラムゼイ型の無限期間モデルと有限期間の世代重複モデルに大別される。どちらも解析的な方法で解を求めることは難しい。このためラムゼイモデルについては差分法に基づく数値解法が考案されている。一方、構造がきわめて複雑な世代重複モデルの数値計算はほとんど試みられていない。しかし本稿で示したように連続時間にすれば数値計算は思ったほど難しくない。ラムゼイモデルの解法を少し修正するだけで済む。今後は世代重複モデルを用いて少子高齢化や財政再建など日本の直面する問題と取り組みたい。

注

1) Blanchard and Fischer(1989) の第３章は OLG モデルについて詳しく説明している。
2) 図を見やすくするために、分点数は I=40, J=15 としている。
3) 釜 (2021) の図13.2 を参照せよ。
4) 利子率は主観的割引率より高くなる。割引率が 0.08 より高いと利子率は割引率より低くなるが、0.08 より低いと両者の関係は逆転する。計画期間が有限であることがその原因とみられる。

参考文献

釜国男 (2021)『計算経済学』第13章、日本評論社。

Achdou, Yves, Jiequn Han, Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions, and Benjamin Moll. (2017) “Income and Wealth Distribution in Macroeconomics: A Continuous-Time Approach”, *NBER Working Papers* 23732.

Allais, M. (1947), *Économie et Intérêt*, Imprimerie Nationale, Paris.

Auerbach, A. J. and L. J. Kotlikoff. (1987) *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge University Press.

Blanchard, O. J. and S. Fischer. (1989) *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.

Samuelson, P. A. (1958) “An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money”, *Journal of Political Economy*, Vol.66, pp.467-482.