異質的主体モデルの最適制御
（計算経済学の研究その20）
Heterogeneous Agents and Optimal Control

釜　　国男*
Kunio KAMA

最適制御理論はさまざまな経済問題に応用されている。マクロ経済学の分野では経済成長論への応用が重要である。古くはラムゼイによる動学的な資源配分問題への応用がある。サムエルソンとソローは古典的な変分法を用いて最適資本蓄積の理論を展開した。変分法の他にも最大値原理や動的計画法などが使われている。理論的な研究だけでなくマクロ計量経済モデルにも応用されており、一部の国は現実の政策決定に利用している。マクロ経済学ではこれまで同質的主体のモデルが使われてきた。しかし最近、異質的主体モデルを使った研究が増えている。これは経済格差の問題に対する関心が高まっていることを反映している。また経済成長や安定化政策の問題でも経済主体の異質性が重要な役割を果たしているからである。初期の研究として Bewley (1986)、Huggett (1993)、Aiyagari (1994)、Krusell and Smith (1998) などがあげられる[1)]。いまでは標準的不完備市場モデルが共通の土台として広く受け入れられている。これはケインジアンの IS=LM モデルに相当する基本的なモデルである。ただし、これまでのところポジティブな分析に限られ規範的な分析はほとんど手が付けられていない[2)]。これにはいくつかの理由があるが、理論的な方法が確立されていないことが最大の理由である。最近、Nuno and Moll (2018) は異質的主体モデルの最適制御法を提案している。本稿の目的はその方法を説明して標準的な不完備市場モデルに適用することである。

1. 競争均衡

多くの消費者が区間 [0,1] に一様に分布しており、つねに死亡する可能性がある。1期間当たりの死亡率を η とする。死亡すれば新しい消費者が生まれて人口は一定に保たれる。状態変数 $X(t)$ はつぎの伊藤過程に従う。

$$dX(t) = b(X(t), \mu(t, X(t)), Z(t))dt + \sigma(X(t))dW(t) \qquad (1)$$

$$X(0) = x_0$$

ここで $\mu \in M \subset R^m$ は政策変数で、 $Z(t) \in R^p$ は集計量である。$b(\cdot)$ と $\sigma(\cdot)$ がつぎの条件を満た

* 創価大学名誉教授

すと、上の確率微分方程式には唯一の解がある。

［条件］すべての $x, x' \in R^n$, $\mu, \mu' \in M$, $Z, Z' \in R^p$ に対して

$$|b(x,\mu,Z) - b(x',\mu',Z)| \le K(|x-x'| + |\mu-\mu'| + |Z-Z'|)$$

$$|\sigma(x) - \sigma(x')| \le K|x-x'|$$

となる $K > 0$ が存在する。

消費者は期待効用の現在価値

$$J(t,x,\mu) = E\left[\int_0^\infty e^{-(\rho+\eta)(s-t)} u(X(s),\mu(s))ds \mid X(t) = x\right]$$

を最大化する。$u(x,\mu)$ は狭義単調増加関数であり、主観的割引率 $\rho > 0$ は一定とする。関数 $V(t,x)$ をつぎのように定義しておく。

$$V(t,x) = \max_u J(t,x,u) \tag{2}$$

横断性条件は

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} V(t,x) = 0 \tag{3}$$

である。

上の最大化問題の解はつぎの HJB 方程式を満たす。

$$\rho V = \frac{\partial V}{\partial t} + \max_\mu \{u(x,\mu) + AV\} \tag{4}$$

右辺の A は微分作用素であり

$$AV = \sum_{i=1}^n b_i(x,\mu,Z)\frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{(\sigma(x)\sigma(x)')_{i,k}}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} - \eta V \tag{5}$$

となる。新たに生まれた消費者の状態変数の分布を $\psi(x)$ とする。また $t = 0$ における既存の消費者の状態変数の分布を $g_0(x)$ とする。$g(t,x)$ は時間的に変化し、つぎのコルモゴロフ方程式を満たす。

$$\frac{\partial g}{\partial t} = A^* g + \eta\psi \tag{6}$$

$$\int g(t,x)dx = 1 \tag{7}$$

A^* は A の共役作用素であり

$$A^* g = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(x,\mu,Z)g(t,x)] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left[(\sigma(x)\sigma(x)')_{i,k}\, g(t,x)\right] - \eta g \tag{8}$$

となる。右辺の第１項はドリフトによる変化に対応し、第２項はボラティリティによる変化、第３項は死亡による分布の変化を表している。

つぎのように集計量を定義する。

$$Z_k(t) = \int f_k(x,\mu)g(t,x)dx \,,\ k = 1,\ldots,p \tag{9}$$

これらの集計量は市場均衡式に現れる。

つぎの３つの条件を満たす関数 $V(t,x)$, $\mu(t,x)$, $g(t,x)$, $Z(t)$ によって市場均衡を定義する。

(1) $Z(t)$ が与えられたとき、$V(t,x)$ は HJB 方程式を満たし $\mu(t,x)$ は最適解である。

(2) $\mu(t,x)$ と $Z(t)$ が与えられたとき、$g(t,x)$ はコルモゴロフ方程式を満たす。

(3) $\mu(t,x)$ と $g(t,x)$ が与えられたとき、$Z(t)$ は市場均衡条件を満たす。

適当な条件のもとで唯一の解が存在するが、解析的な方法は役に立たない。次善の方法として数値計算を行って近似解を求める。

2. 最適制御

なんらかの理由で市場が存在しないか、存在しても不完全であれば、競争均衡は非効率的な資源配分をもたらす。このような場合、最適資源配分を実現する一つの方法は政府による市場介入である。通常は税制や社会保障制度を通じて所得の再分配を行うが、ここでは消費を直接制御して社会的厚生

$$U^{opt} = \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\int w(t,x)u(x,\mu)g(t,x)dx\right]dt$$

を最大化する方法を探る。平等主義の立場からウエイトは $w(t,x) = 1$ とする。要約すると、計画当局は (6) と (9) の制約のもとで

$$J(g(0,x)) \equiv \max_{\mu(t,x)} U^{opt}(g(0,x)) \tag{10}$$

を最大化する。通常の動的計画法では資産などの変数が状態変数となるが、この場合は資産と労働生産性の確率密度関数が状態変数となる。このため無限次元の最大化問題を解かなければならない。この問題に関してつぎの命題が成り立つ。

［命題１］

(10) の問題に解があり $e^{-\rho t}\mu$, $e^{-\rho t}g \in L^2([0,\infty) \times R^n)$, $e^{-\rho t}Z \in L^2[0,\infty)$ であれば

$$J(g(0,x)) = \int j(0,x)g(0,x)dx + \eta\int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\int j(t,x)\psi(x)dx\right]dt \tag{11}$$

となる。ここで $j(x,t)$ は HJB 方程式

$$\rho j = \frac{\partial j}{\partial t} + \max_{\mu}\left\{ w(t,x)u(x,\mu) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k(t)[f_k(x,\mu) - Z_k(t)] + Aj \right\} \tag{12}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} j(t,x) = 0 \tag{13}$$

の解である。ラグランジュ乗数 $\lambda_k(t)$ は

$$\lambda_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial j}{\partial x_i} \frac{\partial b_i}{\partial Z_k} g(t,x)dx \tag{14}$$

で与えられる。

Nuno and Moll (2018) を参考にしてこの命題を証明しよう。はじめにいくつかの概念について説明しておく必要がある。関数解析では

$$\int_{\Phi} e^{-\rho t} \mid f \mid^2 dx < \infty$$

となる関数の集合を $L^2(\Phi)$ と表し、二つの関数 u, g の内積を

$$\langle u,\ g \rangle_{\Phi} = \int_{\Phi} ugdx$$

と定義する。$L^2(\Phi)$ はヒルベルト空間である[3)]。社会的厚生は

$$\int_{\Phi} e^{-\rho t} w(t,x)u(x,\mu)g(t,x)dxdt = \left\langle e^{-\rho t} wu, g \right\rangle_{\Phi}$$

と表される。制約条件のついた計画問題のラグランジュ関数を

$$L(g,\mu_1,..,\mu_m,Z_1,..,Z_p) = \left\langle e^{-\rho t} wu, g \right\rangle_{\Phi} + \left\langle j, e^{-\rho t}\left(-\frac{\partial g}{\partial t} + A^* g + \eta\psi \right) \right\rangle_{\Phi}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \left\langle \lambda_k, e^{-\rho t}(f_k - Z_k)g \right\rangle_{\Phi} \tag{15}$$

とする。ここで $e^{-\rho t}\lambda_k \in L^2[0,\infty)$ はラグランジュ乗数である。$g, \mu_1,..., \mu_m, Z_1,..., Z_p$ に関するガトー微分をゼロとおけば、最適解の必要条件が得られる[4)]。便宜上、(15) の第２項をつぎのように変形しておく。

$$\left\langle j, e^{-\rho t}\left(-\frac{\partial g}{\partial t} + A^* g + \eta\psi \right) \right\rangle_{\Phi} = \int_0^{\infty}\!\!\int e^{-\rho t} j(t,x)\left(-\frac{\partial g}{\partial t} + A^* g + \eta\psi \right) dxdt$$

$$= -\int e^{-\rho t} j(t,x)g(t,x)\Big|_0^{\infty} dx + \int_0^{\infty}\!\!\int e^{-\rho t}\left(\frac{\partial j}{\partial t} - \rho j(t,x) \right) gdxdt$$

$$+ \eta \int_0^{\infty}\!\!\int e^{-\rho t} j(t,x)\psi(t,x)dxdt + \left\langle e^{-\rho t} Aj, g \right\rangle_{\Phi}$$

$$= -\lim_{T\to\infty} \int e^{-\rho T} j(T,x)g(T,x)dx + \int j(0,x)g(0,x)dx$$

$$+\eta \int_0^\infty \int e^{-\rho t} j(t,x)\psi(t,x)dxdt + \left\langle e^{-\rho t}\left(\frac{\partial j}{\partial t} - \rho j + Aj\right), g \right\rangle_\Phi$$

ただし $\langle j, A^* g\rangle = \langle Aj, g\rangle$ である。

L の g に関する h 方向のガトー微分は

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\langle e^{-\rho t} wu, g+\alpha h\right\rangle_\Phi\Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left\langle e^{-\rho t}\left(\frac{\partial j}{\partial t} - \rho j + Aj\right), g+\alpha h \right\rangle_\Phi\Big|_{\alpha=0}$$

$$-\lim_{T\to\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\int e^{-\rho T} j(T,x)(g(T,x)+\alpha h(T,x))dx\Big|_{\alpha=0}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \alpha}\sum_{k=1}^{p}\left\langle e^{-\rho t}\lambda_k, (f_k - Z_k)(g+\alpha h)\right\rangle_\Phi\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\left\langle e^{-\rho t} wu, h\right\rangle_\Phi + \left\langle e^{-\rho t}\left(\frac{\partial j}{\partial t} - \rho j + Aj\right), h \right\rangle_\Phi$$

$$-\lim_{T\to\infty} \int e^{-\rho T} j(T,x)h(T,x)dx + \sum_{k=1}^{p}\left\langle e^{-\rho t}\lambda_k, (f_k - Z_k)h\right\rangle_\Phi$$

となる。ここで $g(0,x)$ は無視してもかまわない。これは任意の $h(t,x)$ に対してゼロとなるので

$$\rho j = \frac{\partial j}{\partial t} + wu + \sum_{k=1}^{p}\lambda_k(f_k - Z_k) + Aj \tag{16}$$

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\rho T} j(T,x) = 0 \tag{17}$$

が成り立つ。(16) は計画当局の HJB 方程式である。

μ_j については

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\langle e^{-\rho t} wu(x,\mu_1,..,\mu_j+\alpha h,..,\mu_m), g\right\rangle_\Phi\Big|_{\alpha=0}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\langle e^{-\rho t}\left(\frac{\partial j}{\partial t} - \rho j + A_{(\mu_j+\alpha h)} j\right), g \right\rangle_\Phi\Big|_{\alpha=0}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \alpha}\sum_{k=1}^{p}\left\langle e^{-\rho t}\lambda_k, \left(f_k\left(x,\mu_1,..,\mu_j+\alpha h,..,\mu_m\right) - Z_k\right)g \right\rangle_\Phi\Big|_{\alpha=0} \tag{18}$$

となる。ここで

$$A_{(\mu_j+\alpha h)}j=\sum_{i=1}^{n}b_i(x,\mu_1,..,\mu_j+\alpha h,..,\mu_m,Z)\frac{\partial j}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\sigma(x)\sigma(x)')_{i,k}}{2}\frac{\partial^2 j}{\partial x_i\partial x_k}-\eta j$$

である。(18) をゼロとおいて μ を求めると

$$\mu=\arg\max_{\tilde{\mu}}\left\{wu(x,\tilde{\mu})+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k f_k(x,\tilde{\mu})+A_{\tilde{\mu}}j\right\} \tag{19}$$

となる。

集計量に関するガトー微分は

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\langle e^{-\rho t}j,A^*_{(Z_k+\alpha h)}g\right\rangle_\Phi\Big|_{\alpha=0}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\langle e^{-\rho t}\lambda_k,(f_k-(Z_k+\alpha h))g\right\rangle_\Phi\Big|_{\alpha=0} \tag{20}$$

となる。ただし

$$A^*_{(Z_k+\alpha h)}g=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[b_i(x,\mu,Z_1,..,Z_k+\alpha h,..,Z_p)g\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left[(\sigma(x)\sigma(x)')_{i,k}g\right]-\eta g$$

である。(20) はつぎのように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty\int e^{-\rho t}\left\{j(t,x)\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(x,\mu,Z_1,..,Z_k+\alpha h,..,Z_p)g(t,x)]\right)-\lambda_k(t)(Z_k+\alpha h)g(t,x)\right\}dxdt\Big|_{\alpha=0}$$

α で微分して極限値を計算すると

$$-\int_0^\infty e^{-\rho t}h(t)\left\{\int j(t,x)\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 b_i}{\partial Z_k\partial x_i}g(t,x)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 b_i}{\partial Z_k\partial\mu_j}\frac{\partial\mu_j}{\partial x_i}g(t,x)+\frac{\partial b_i}{\partial Z_k}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]\right)dx+\lambda_k(t)\right\}dt$$

となる。これは任意の $h(t)$ についてゼロとなるので

$$\lambda_k(t)=-\int j(t,x)\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 b_i}{\partial Z_k\partial x_i}g(t,x)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 b_i}{\partial Z_k\partial\mu_j}\frac{\partial\mu_k}{\partial x_i}g(t,x)+\frac{\partial b_i}{\partial Z_k}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]\right\}dx$$

部分積分により

$$\lambda_k(t)=\sum_{i=1}^{n}\int\frac{\partial j}{\partial x_i}\frac{\partial b_i}{\partial Z_k}g(t,x)dx \tag{21}$$

を得る。

つぎに (16) の両辺に $e^{-\rho t}g(t,x)$ を掛けて積分すると

$$\int_0^\infty\int\rho e^{-\rho t}jgdxdt=\int_0^\infty\int e^{-\rho t}\left(\frac{\partial j}{\partial t}+wu+\sum_{k=1}^{p}\lambda_k(f_k-Z_k)+Aj\right)gdxdt$$

ここで

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} g \frac{\partial j}{\partial t} dt = e^{-\rho t} \ g(t,x) j(t,x) |_0^{\infty} - \int_0^{\infty} j \frac{\partial}{\partial t} (e^{-\rho t} \ g) dt$$

$$= -g(0,x) j(0,x) + \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \rho j g dt - \int_0^{\infty} e^{-\rho t} j \frac{\partial g}{\partial t} dt$$

となる。市場均衡条件と、A^* は A の共役作用素であることから

$$\int g(0,x) j(0,x) dx = \int_0^{\infty} \int e^{-\rho t} wugdxdt + \int_0^{\infty} \int e^{-\rho t} j \left(-\frac{\partial g}{\partial t} + A^* g \right) dxdt$$

となる。また (6) から

$$\int_0^{\infty} \int e^{-\rho t} j \left(-\frac{\partial g}{\partial t} + A^* g \right) dxdt = -\eta \int_0^{\infty} \int j(t,x) \psi(x) dxdt$$

以上の結果、社会的厚生は

$$J(g(0,x)) = \int_0^{\infty} \int e^{-\rho t} w(t,x) u(t,x) g(t,x) dxdt$$

$$= \int j(0,x) g(0,x) dx + \eta \int_0^{\infty} \int e^{-\rho t} j(t,x) \psi(t,x) dxdt$$

と表される。

(4) と (12) を比較するとわかるように

$$\sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial b_i}{\partial Z_k} g(t,x) dx = 0$$

であれば競争均衡は社会的な最適資源配分をもたらす。したがって競争均衡を求めてラグランジュ乗数を計算すれば最適状態であるかどうか判定できる。

3. 不完備市場モデルへの応用

3.1 モデル

命題 1 は一般的に成り立つ命題であり、一例としてアイヤガリモデルに適用してみよう。消費者は予算制約のもとで

$$U = E_0 \int_0^{\infty} e^{-(\rho+\eta)t} u(c(t)) dt \tag{22}$$

を最大化する。ただし効用関数は

$$u(c)=\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (\gamma>1) \tag{23}$$

とする。予算制約は

$$da_t=[w_t z_t+(r_t+\eta)a_t-c_t]dt=s(a_t,w_t,z_t,r_t,c_t)dt \tag{24}$$

である。a_t は資産で w_t は実質賃金、z_t は効率労働、r_t は実質利子率である。借入制約

$$a_t \geq -\phi \quad (\phi \geq 0) \tag{25}$$

も満たさなければならない。

労働供給はつぎの確率過程に従う。

$$dz_t=\theta(\bar{z}-z_t)dt+\sigma dW_t \ , \ (z_1 \leq z_t \leq z_2) \tag{26}$$

$\theta>0$ で $E[z_t]=1$ とする。

代表的企業は資本と労働を用いて財・サービスを生産する。生産関数は $Y=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ とする。完全競争を仮定すると実質賃金と利子率は

$$w_t=(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

$$r_t=\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}-\delta \tag{27}$$

となる。

資産と労働供給の分布はつぎのコルモゴロフ方程式を満たす。

$$\frac{\partial g}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial a}(s(a,w,z,r,c)g)-\frac{\partial}{\partial z}(\theta(\bar{z}-z)g)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma^2 g)-\eta g+\eta\delta_0 \tag{28}$$

右辺の $-\eta g$ は死亡による人口の減少で、$\eta\delta_0=\eta\delta(a)\delta(\bar{z}-z)$ は新たに生まれた消費者である。$\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数を表す。規格化の条件

$$\int\int_{z_1}^{z_2} g(t,a,z)dzda=1$$

も満たさなければならない。

資本市場の均衡条件は

$$K_t=\int\int_{z_1}^{z_2} ag(t,a,z)dzda \tag{29}$$

である。

3.2 競争均衡

消費者は (24) と (26) を考慮して (22) の U を最大化する。HJB 方程式は

$$(\rho+\eta)V=\max_{c\geq 0, a\geq -\varphi}\left[\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}+s(a,w,z,r,c)\frac{\partial V}{\partial a}+\theta(\bar{z}-z)\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{\partial V}{\partial t}\right] \tag{30}$$

となる。競争均衡ではつぎの条件が満たされる。

(1) K が与えられたとき、V は (30) の解で c は最適消費となる。

(2) K と c が与えられたとき、g はコルモゴロフ方程式を満たす。

(3) K と g は資本市場を均衡させる。

モデルを解析的に解くことは難しい。このため数値計算を行って近似解を求めることにした。いくつかの方法があるが、ここでは差分法を用いる。はじめに状態変数を $a=\{a_1,\ldots,a_I\}$ と $z=\{z_1,\ldots,z_J\}$ によって近似して、$V_{i,j}=V(a_i,z_j)\ (i=1,\ldots,I,\ j=1,\ldots,J)$ とする。Value function の資産に関する微分を

$$\text{前進差分}: \frac{\partial V(a_i,z_j)}{\partial a}\approx \partial_{a,F}V_{i,j}\equiv\frac{V_{i+1,j}-V_{i,j}}{\Delta a}$$

$$\text{後退差分}: \frac{\partial V(a_i,z_j)}{\partial a}\approx \partial_{a,B}V_{i,j}\equiv\frac{V_{i,j}-V_{i-1,j}}{\Delta a}$$

によって近似する。貯蓄が正であれば前進差分を用い、負であれば後退差分とする。労働効率については

$$\frac{\partial V(a_i,z_j)}{\partial z}\approx \partial_{z}V_{i,j}\equiv\frac{V_{i,j+1}-V_{i,j}}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial^2 V(a_i,z_j)}{\partial z^2}\approx \partial_{zz}V_{i,j}\equiv\frac{V_{i,j+1}+V_{i,j-1}-2V_{i,j}}{(\Delta z)^2}$$

とする。定常状態では (30) は

$$(\rho+\eta)V=u(c)+(wz+(r+\eta)a-c)\frac{\partial V}{\partial a}+\theta(\bar{z}-z)\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$c=(u')^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)$$

となる。これを次式で近似する。

$$\frac{V_{i,j}^{n+1}-V_{i,j}^{n}}{\Delta}+\rho V_{i,j}^{n+1}=u(c_{i,j}^{n})+\partial_{a,F}V_{i,j}^{n+1}(s_{i,j,F}^{n})^{+}+\partial_{a,B}V_{i,j}^{n+1}(s_{i,j,B}^{n})^{-}$$

$$+\theta(\bar{z}-z_j)\partial_z V_{i,j}^{n+1}+\frac{\sigma^2}{2}\partial_{zz}V_{i,j}^{n+1}-\eta V_{i,j}^{n+1}$$

ここで

$$(s_{i,j,F}^n)^+=\max\{s_{i,j,F}^n,0\}\quad,\quad(s_{i,j,B}^n)^-=\min\{s_{i,j,B}^n,0\}$$

$$s_{i,j,F}^n=wz_j+(r+\eta)a_i-(u')^{-1}(\partial_{a,F}V_{i,j}^n)$$

$$s_{i,j,B}^n=wz_j+(r+\eta)a_i-(u')^{-1}(\partial_{a,B}V_{i,j}^n)$$

である。$V_{i-1,j}^{n+1}, V_{i,j}^{n+1}, V_{i+1,j}^{n+1}, V_{i,j-1}^{n+1}, V_{i,j+1}^{n+1}$ について整理すると

$$\frac{V_{i,j}^{n+1}-V_{i,j}^n}{\Delta}+\rho V_{i,j}^{n+1}=u(c_{i,j}^n)+V_{i-1,j}^{n+1}\xi_{i,j}+V_{i,j}^{n+1}\varsigma_{i,j}+V_{i+1,j}^{n+1}\chi_{i,j}+V_{i,j-1}^{n+1}\beta+V_{i,j+1}^n\varphi_j \tag{31}$$

となる。ただし右辺の係数は

$$\xi_{i,j}=-\frac{(s_{i,j,B}^n)^-}{\Delta a}$$

$$\zeta_{i,j}=-\frac{(s_{i,j,F}^n)^+}{\Delta a}+\frac{(s_{i,j,B}^n)^-}{\Delta a}-\frac{\theta(\bar{z}-z)}{\Delta z}-\frac{\sigma^2}{(\Delta z)^2}-\eta$$

$$\chi_{i,j}=\frac{(s_{i,j,F}^n)^+}{\Delta a}$$

$$\beta=\frac{\sigma^2}{2(\Delta z)^2}$$

$$\varphi_j=\frac{\sigma^2}{2(\Delta z)^2}+\frac{\theta(\bar{z}-z_j)}{\Delta z}$$

である。$V^n=[V_{1,1}^n\ldots.V_{N,1}^n\,V_{1,2.}^n\ldots.V_{N,2}^n\ldots\ldots\ldots V_{1,M}^n\ldots\ldots V_{N,M}^n]$,

$u^n=[u(c_{1,1}^n),\ldots,u(c_{N,1}^{nn}),u(c_{1,2}^n),\ldots,u(c_{N,2}^n),\ldots,u(c_{1,M}^n),\ldots,u(c_{N,M}^n)]$とすると、(31) は

$$\frac{V^{n+1}-V^n}{\Delta}+\rho V^{n+1}=u^n+A^nV^{n+1} \tag{32}$$

と書き表される。ただし A^n は (31) の係数を要素とする行列である。資本ストックが与えられると、つぎのステップで HJB 方程式の解を求める。

［ステップ１］ $V_{i,j}^0=u(wz_j+ra_i)/\rho$, $n=0$とする。

［ステップ２］ $\partial_{a,F}V_{i,j}^n$, $\partial_{a,B}V_{i,j}^n$, $\partial_z V_{i,j}^n$, $\partial_{zz}V_{i,j}^n$を求める。

［ステップ３］ $c_{i,j}^n$ を計算する。

［ステップ４］(32) から $V_{i,j}^{n+1}$を計算する。

［ステップ５］$V_{i,j}^{n+1}\cong V_{i,j}^n$であれば終了する。そうでなければ $n\leftarrow n+1$ としてステップ２へ戻る。

定常状態において (28) は

$$0=-\frac{\partial}{\partial a}[(wz+(r+\eta)a-c)g]-\frac{\partial}{\partial z}[\theta(\bar{z}-z)g]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma^2 g)-\eta g+\eta\delta_0$$

$$\int g(a,z)dadz=1$$

と書ける。この式を

$$0=-\frac{g_{i,j}(s^n_{i,j,F})^+-g_{i-1,j}(s^n_{i-1,j,F})^+}{\Delta a}-\frac{g_{i+1,j}(s^n_{i+1,j,B})^- -g_{i,j}(s^n_{i,j,B})^-}{\Delta a}$$

$$-\frac{g_{i,j}\theta(\bar{z}-z_j)-g_{i,j-1}\theta(\bar{z}-z_{j-1})}{\Delta z}+\frac{g_{i,j+1}\sigma^2+g_{i,j-1}\sigma^2-2g_{i,j}\sigma^2}{2(\Delta z)^2}-\eta g_{i,j}+\eta\delta_0$$

または

$$g_{i-1,j}\chi_{i-1,j}+g_{i+1,j}\xi_{i+1,j}+g_{i,j}\zeta_{i,j}+g_{i,j+1}\beta+g_{i,j-1}\varphi_{i-1}=-\eta\delta_0 \tag{33}$$

によって近似する。これは $g_{i,j}$ に関する連立 1 次方程式であり、(31) のように反復計算する必要はない。最後に

$$\hat{g}_{i,j}=\frac{g_{i,j}}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}g_{i,j}\Delta a\Delta z}$$

と規格化する。

モデルのパラメータは α = 0.36, γ = 2, ρ = 0.05, δ = 0.08, η = 0.02, θ = 0.4, σ^2 = 0.4 とした。労働生産性と資産は 0.2 ≤ z ≤ 1.8, 0 ≤ a ≤ 80 の区間にとり、それぞれ 100 と 30 の分点で近似する。数値計算の結果、均衡利子率は r^* = 5.61%、実質賃金は w^* = 1.106、資本ストックは K^* = 4.570、総生産は Y^* = 1.728、総消費は C^* = 1.324 となる。割引率と死亡率の和は $\rho+\eta$ = 0.076 であり利子率より高い。社会的効用

$$U_{social}=\frac{1}{(\rho+\eta)}\int\int_{z_1}^{z_2}u(c)g(a,z)dzda$$

を計算すると、U_{social} = –12.506 となる。所得のジニ係数は 0.828 と高く所得分配はかなり不平等である。図 1 は消費の決定式を示している。資産や労働生産性が上昇すると、所得の増加で消費は拡大する。図 2 は資産と労働生産性の分布である。狭い領域に分布しており、一部の消費者は借入限度に直面している。η = 0 であれば死亡のリスクはなくなり貯蓄と資本は増加すると予想される。実際に計算してみると、K^* = 5.202, r^* = 4.53%, w^* = 1.159 となる。予想通り資本は増加して実質賃金は上昇し、実質利子率は低下する。

図１　消費の決定式

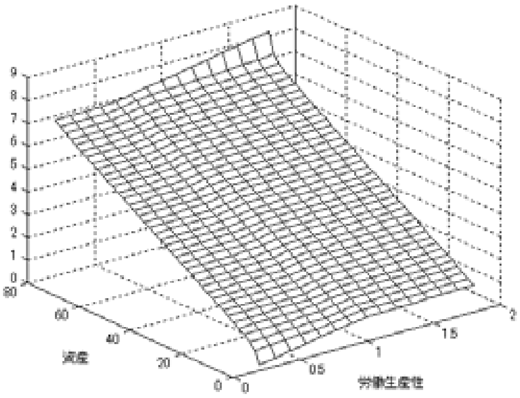
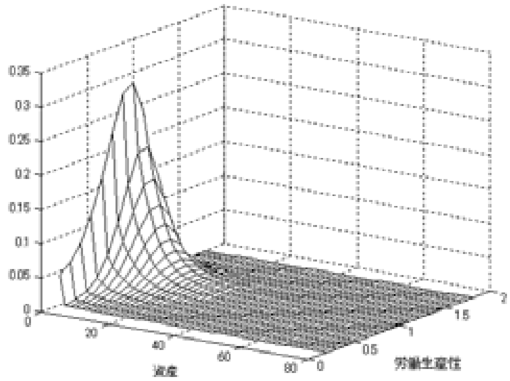


図２　資産と労働生産性の分布



3.3 制御した場合

計画当局は (27)–(29) の制約のもとで

$$J(g(0,a,z)) = \max_{c(t,a,z)} \int\int_{z_1}^{z_2} e^{-(\rho+\eta)t} u(c) g(t,a,z) dadzdt \tag{34}$$

を最大化する。動的計画法を適用するとHJB方程式は

$$(\rho+\eta) j = \max_{c\geq 0, a\geq -\phi} \left[\frac{c^{1-\lambda}}{1-\gamma} + \lambda(a-K(t)) + s(a,w,z,r,c)\frac{\partial j}{\partial a} + \theta(\bar{z}-z)\frac{\partial j}{\partial z} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 j}{\partial z^2} + \frac{\partial j}{\partial t} \right] \tag{35}$$

となる。ラグランジュ乗数は

$$\lambda(t) = \int\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial j}{\partial a}\left(\frac{\partial r}{\partial K} a + \frac{\partial w}{\partial K} z \right) g(t,a,z) dzda$$

$$= -\frac{\alpha(1-\alpha)}{K(t)^{2-\alpha}} \int \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial j}{\partial a}(a - K(t)z)g(t,a,z)dzda \tag{36}$$

である。$\lambda(t) = 0$ であれば消費者と計画当局の value function は一致する。

この場合も数値計算で近似解を求めた。HJB 方程式の近似式は (32) の右辺に $\lambda(a_i - K)$ を加えた式である。つぎのアルゴリズムを実行する。

［ステップ１］ $\lambda = \lambda_0$, $m = 0$ とする。

［ステップ２］ $K = K_0$, $w_0 = (1-\alpha)K_0^{\alpha}$, $r_0 = \alpha K_0^{\alpha-1} - \delta_K$, $n = 0$ とする。

［ステップ３］前節のアルゴリズムを実行して、総資本 $S_n = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_i g_{i,j} \Delta a \Delta z$ を求める。

［ステップ４］ $K_{n+1} = \tau S_n + (1-\tau)K_n$, $0 < \tau < 1$ を計算する。$K_{n+1} \cong K_n$ であれば終了し、そうでなければ $n \leftarrow n + 1$ として収束するまで繰り返し計算する。得られた解 j^m, g^m, K^m から

$$\mu_{m+1} = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{(K^m)^{2-\alpha}} \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \left[a_i \frac{j_{i+1,j}^m - j_{i,j}^m}{\Delta a} - K^m z_j \frac{j_{i+1,j}^m - j_{i,j}^m}{\Delta a} \right] g_{i,j}^m \Delta z \Delta a$$

を計算する。

［ステップ５］ $|\mu_{\mathbf{m+1}} - \lambda_m| \le \varepsilon$ であれば終了し、そうでなければ

$\lambda_{m+1} = \omega\mu_{m+1} + (1-\omega)\lambda_m$, $m \leftarrow m + 1$ としてステップ２へ戻る。

計算の結果、ラグランジュ乗数は $\lambda^* = 0.0269$、利子率は $r^* = -0.84\%$、実質賃金は $w^* = 1.588$、資本ストックは $K^* = 12.478$、総生産は $Y^* = 2.481$、総消費は $C^* = 1.396$ となる[5)]。$\lambda^* > 0$ であり競争均衡は社会的にみて最適状態ではない。消費を直接制御すると、社会的効用は $U_{social} = -10.278$ に改善する。また所得のジニ係数は 0.718 と若干低くなる。資本ストックは大幅に増加して消費、総生産、実質賃金も増加し実質利子率は低下する。消費者の貯蓄は総資本と賃金、利子率を通じて他の消費者に影響を与える。この外部効果を消費の決定にあたって考慮すれば社会的効用は高くなる。図３と図４は消費の決定式と状態変数の分布である。資産と労働生産性は所得を通じて消費を増加させる。このため消費は資産と生産性の増加関数となる。図２と同様に一部の消費者は借入制約に直面している。借入限度が引き上げられると、これらの消費者は消費支出を大幅に拡大する。

図３　消費の決定式（制御した場合）

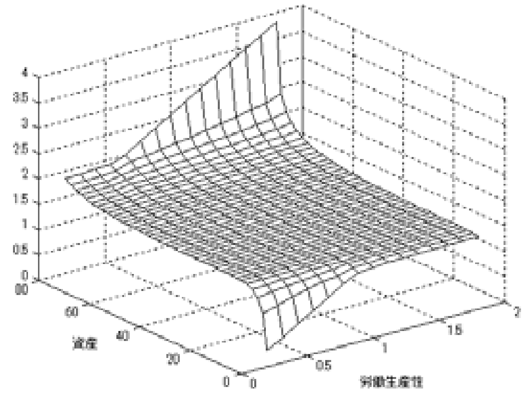
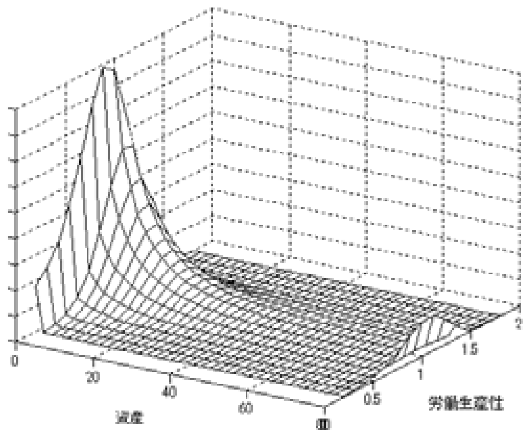


図４　資産と労働生産性の分布（制御した場合）



４. 結語

本稿では異質的主体モデルの最適制御問題を取り上げた。計画当局は消費を直接制御して社会的厚生を最大化する。連続時間のモデルでは関数空間における決定論的な制御問題となり、HJB 方程式とコルモゴロフ方程式を解けば最適解が得られる。数値計算によって定常状態の解を求めることができる。一例として死亡時期が不確実なアイヤガリモデルに適用した。数値計算の結果によると、制御しない場合に比べて資本は大幅に増加して総生産も拡大する。消費の外部効果を考慮しているので社会的厚生は改善する。ここで説明した方法は多くの異質的モデルに適用可能である。集計的ショックを含んだモデルに拡張することが今後の課題である。

注

1) これらの研究とその後の発展について、Heathcote et al. (2009) が詳しい。
2) 唯一の例外は Lucas and Moll (2014) である。
3) Nuno and Moll (2018) の p.169 を参照。
4) 汎関数 L の f に関する g 方向のガトー微分は -

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L(f+\varepsilon g) - L(f)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} L(f+\varepsilon g)\Big|_{\varepsilon=0}$$

と定義される。

5) 資本の限界生産力は正であるが、$K \geq 10.487$ の領域では資本減耗率を下回り実質利子率は負となる。

参考文献

Aiyagari, S. Rao. (1994) “Uninsured Idiosyncratic Risk, and Aggregate Saving”, *Quarterly Journal of Economics*, Vol.109, 659-684.
Bewley, T. (1986) “Stationary Monetary Equilibrium with a Continuum of Independently Fluctuating Consumers”, in *Contributions to mathematical economics in honor of Gerard Debreu* (eds W. Hildenbrand and A. Mas-Collel), 79-102. North Holland, Amsterdam.
Heathcote, J., K. Storesletten, G. L. Violante. (2009) “Quantitative Macroeconomics with Heterogeneous Households”, *Annual Review of Economics*, Vol.1, 319-354.
Huggett, M. (1993) “The Risk-free Rate in Heterogenous-Agent Incomplete-Insurance Economies”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.17, 953-969.
Krusell, P., and A. A. Smith. (1998) “Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy”, *Journal of Political Economy*, Vol.106, 867-896.
Lucas, R., and B. Moll. (2014) “Knowledge Growth and the Allocation of Time”, *Journal of Political Economy*, Vol.122, 1-51.
Nuno, G., and B. Moll. (2018) “Social Optima in Economies with Heterogeneous Agents”, *Review of Economic Dynamics*, Vol.28, 150-180.