# 最適停止問題の数値解析（計算経済学の研究その19）

## Numerical Analysis of the Optimal Stopping Problems

釜　　国男*
Kunio KAMA

### 1. はじめに

秘書の採用など最適タイミングを決定する問題を最適停止問題という。主に応用確率論、統計学、決定理論の分野で研究されている。この問題は経済学でもしばしば登場する。例えば独占企業は価格を据え置くか、変更するかどうか判断する。投資家はオプションを行使するタイミングを決定する。企業にとって設備投資のタイミングはきわめて重要な問題であり、タイミングを誤ると倒産するかもしれない。いずれもやり直しが利かない１回限りの決定である。これらの問題について数学的な研究が行われてきたが、ここでは動的計画の問題として取り上げる。最初に一般的な形で問題を設定して基本的な概念と最適停止政策について説明する。その後、三つの事例をあげて問題の解法を示す。取り上げるのはアメリカン・コールオプション、企業の設備投資、および産業への参入・退出である。これらの問題について最適停止ルールを数値的な方法で求める。いくつかの解法があるが、ここでは Huang and Pang(1998) の提案した変分不等式に基づく方法を用いる。

### 2. 最適停止問題

最初に最適停止問題について簡単に説明する（詳細は Stokey(2008) または Dixit(1993) を参照されたい）。$X(t)$ はつぎの拡散過程にしたがう確率変数である。

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t) \tag{1}$$

ただし $W(t)$ は標準ブラウン運動を表し、$\mu$ と $\sigma$ はドリフト係数と拡散係数である。ここで取り上げるのは収益の条件付き期待値

$$V(x) = E\left[\int_0^{t(b)} e^{-\rho t} f(X(t))dt + e^{-\rho t(b)} S(b) \middle| X(0) = x\right] \tag{2}$$

を最大化する問題である。ただし $t(b)$ は $x$ から $b$ に達するまでの時間を表し、$S(b)$ は停止したと

* 創価大学名誉教授

きの利得である。$x$ の値によって最適な時間は異なる。このため $X$ を停止領域と継続領域に分ける。つまり $x=b$ の左側では事業を停止し、右側では事業を継続する。この問題に動的計画法を適用するために、ブラウン運動を離散近似する。つまり時間を $\Delta t$ の間隔で近似して、$x$ の間隔を $\Delta x=\sigma\sqrt{\Delta t}$ とする。そして $X$ を $p,q$ の確率で上下に移動するランダム・ウォークによって近似する。ただし

$$p=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right] \quad , \quad q=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right]$$

とする。$x>b$ なら

$$V(x)=f(x)\Delta t+(1-\rho\Delta t)\left[pV(x+\sigma\sqrt{\Delta t}\,)+qV(x-\sigma\sqrt{\Delta t})\right]$$

となる。テイラー展開により

$$V(x+\sigma\sqrt{\Delta t})=V(x)+V'(x)\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}V''(x)\sigma^2\Delta t+\cdots$$

$$V(x-\sigma\sqrt{\Delta t})=V(x)-V'(x)\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}V''(x)\sigma^2\Delta t+\cdots$$

であるから

$$\rho\Delta tV(x)=f(x)\Delta t+(1-\rho\Delta t)\left[(2p-1)V'(x)\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}V''(x)\sigma^2\Delta t\right]$$

となり、両辺を $\Delta t$ で割ると

$$\rho V(x)=f(x)+(1-\rho\Delta t)\left[\frac{(2p-1)V'(x)\sigma}{\sqrt{\Delta t}}+\frac{1}{2}V''(x)\sigma^2\right]$$

となる。 $(2p-1)/\sqrt{\Delta t}=\mu/\sigma$ を代入すると

$$\rho V(x)=f(x)+(1-\rho\Delta t)\left[V'(x)\mu+\frac{1}{2}V''(x)\sigma^2\right]$$

$\Delta t\to 0$ とすると、HJB 方程式

$$\rho V(x)=f(x)+V'(x)\mu+\frac{1}{2}V''(x)\sigma^2 \tag{3}$$

が得られる。

$x=b+\Delta x$ とすると

$$V(b+\Delta x)=f(b+\Delta x)\Delta t+(1-\rho\Delta t)\left[pS(b)+qV(b+2\Delta x)\right]$$

となる。テイラー展開して $\Delta t\to 0$ とすると

$$V(b)=S(b) \tag{4}$$

が成り立つ。これはバリュー・マッチング条件とよばれる。この条件を満たすと価値関数は停止領域と継続領域の境界点で連続的に変化する。

つぎに $x \to b+0$ とする。$S$ は一定とすると、HJB 方程式は

$$V(x) = f(x)\Delta t + (1-\rho\Delta t)\left[ p\max\{V(x+\sigma\sqrt{\Delta t}, S\} + q\max\{V(x-\sigma\sqrt{\Delta t}, S\} \right]$$

と書ける。テイラー展開して $x=b$ を代入すると

$$\rho\Delta t S = f(b)\Delta t + (1-\rho\Delta t)\left[ p\max\left\{ V'(b)\sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}V''(b)\sigma^2\Delta t, 0 \right\} \right.$$

$$\left. + q\max\left\{ -V'(b)\sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}V''(b)\sigma^2\Delta t, 0 \right\} \right]$$

となり、両辺を $\sqrt{\Delta t}$ で割ると

$$\rho\sqrt{\Delta t}S = f(b)\sqrt{\Delta t} + (1-\rho\Delta t)\left[ p\max\left\{ V'(b)\sigma + \frac{1}{2}V''(b)\sigma^2\sqrt{\Delta t}, 0 \right\} \right.$$

$$\left. + q\max\left\{ -V'(b)\sigma + \frac{1}{2}V''(b)\sigma^2\sqrt{\Delta t}, 0 \right\} \right]$$

となる。$\Delta t \to 0$ とすると

$$0 = \frac{1}{2}\max\{V'(b)\sigma, 0\} + \frac{1}{2}\max\{-V'(b)\sigma, 0\}$$

この式が成り立つためには

$$V'(b) = 0$$

でなければならない。これはスムース・ペースティング条件とよばれる。$S$ が $x$ の関数であるときは

$$V'(b) = S'(b) \tag{5}$$

が成り立つ。

以上の結果を要約すると

$$V(x) \ge S(x), \quad \rho V(x) = f(x) + \mu(x)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)V''(x) \quad (x \ge b)$$

$$V(x) = S(x), \quad \rho V(x) \ge f(x) + \mu(x)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)V''(x) \quad (x \le b)$$

一つの式で

$$\min\left\{ \rho V(x) - f(x) - \mu(x)V'(x) - \frac{1}{2}\sigma^2(x)V''(x), V(x) - S(x) \right\} = 0 \tag{6}$$

と表される。これは HJB 方程式に関する変分不等式である。この不等式の解はスムース・ペースティング条件を満たす（Oksendal(1998) を参照）。つぎに本節で説明した方法を三つの最適停止問題に適用する。

## 3. オプションの権利行使問題

最初に取り上げるのはアメリカン・コールオプションの権利行使問題である。アメリカン・オプションでは満期日になる前に権利を行使することができる。このため投資家はいつ権利を行使するのか決定する。ヨーロピアンタイプと異なり、アメリカンタイプのオプションには解析的な解はない。このため差分法をはじめいくつかの数値解法が考案されている。投資家の問題は与えられた価格のもとでオプションの価値を最大化することである。

$$V(s) = \max_{0,\tau \le T} E[e^{-r\tau}(S(\tau)) - K)^{+} \big| S(0) = s] \tag{7}$$

$S$ は株価で $K$ は行使価格であり、$r$ は無リスク利子率、$\tau$ は権利行使の時刻である。$(x)^{+} = \max(x, 0)$ とする。簡単化のため、株価が境界値より高くなると権利を行使するストッピング・ルールを採用する。株価が最初に $c$ と等しくなる時刻を $\tau(c)$ とする。すなわち、$\tau(c) = \inf\{t \ge 0 : S(t) = c, S(u) < c, \forall u < t\}$。これに対応して株価を二つの領域に分ける。$0 \le s < c$ の領域では株価は低く、満期前に権利を行使するのは最適ではない。このとき次式が成り立つ。

$$V(s) > s - K, \quad rV(s) = \mu s V'(s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 V''(s)$$

もう一つの領域 $c < s < \infty$ では株価は高く、満期前の権利行使は最適であり

$$V(s) = s - K, \quad rV(s) \ge rsV'(s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 V''(s)$$

が成り立つ。まとめて表すと

$$\min\left\{rV(s) - \mu s V'(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 V''(s), V(s) - (s - K)\right\} = 0 \tag{8}$$

$r > \mu + \sigma^2/2$ であれば最適タイミングが存在する。しかし最適停止ルールを解析的に求めることは難しい。このため (8) を差分近似して解を求める。計算方法は企業の設備投資と参入・退出の問題に関連して示す。

## 4. 設備投資問題

設備投資の決定は企業経営の大問題である。投資はまた景気変動の重要な要因でもある。この節では最適投資のタイミングについて考える。投資を行うには費用がかかり、投資収益はつぎの幾何ブラウン運動にしたがう。

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \qquad (\rho > \mu) \tag{9}$$

収益が十分大きくなってから投資するのが合理的である。Value function を

$$V(x) = \max_{0 \le \tau < \infty} E\left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho t} X(t)dt - e^{-\rho t} I \big| X(0) = x\right]$$

とする。ここで

$$\tau = \inf\{t > 0 : X(t) \ge X^{*}\}$$

であり $\tau$ は臨界値 $X^*$ への最短到達時刻である。したがって $\tau$ を決める問題は臨界値を求める問題に変換される。投資を実行した時点では $\tau = 0$ であり、投資は

$$S(x) = E\left[\int_0^\infty e^{-\rho t} X(t)dt - I\right] = \frac{x}{\rho - \mu} - I \tag{10}$$

の価値を生み出す[1)]。$\rho > \mu$ より $S(x)$ は右上がりの直線となる。$x \ge X^*$ であれば $V(x) = S(x)$ となる。一方、$x < X^*$ であれば $V(x) \ge S(x)$ となり

$$\rho V(x) = \mu x V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V''(x) \tag{11}$$

が成り立つ。二つの条件をまとめて

$$\min\left[\rho V(x) - \mu x V'(x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V''(x), V(x) - S(x)\right] = 0 \tag{12}$$

と書き表す。

(12) に含まれる HJB 方程式は解析的に解けないので差分法を適用する。分点 $x_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ における近似値を $V_i$ として、$V(x)$ の１次と２次の微分を次式で近似する。

$$V'(x_i) \cong \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta x}$$

$$V''(x_i) \cong \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

(10) から

$$S_i = \frac{x_i}{\rho - \mu} - I$$

となる。投資の価値を $S = [S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m]'$ とする。また (11) の HJB 方程式を

$$\rho V_i = \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta x}\mu x_i + \frac{\sigma^2 x_i^2}{2}\frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

によって近似する。右辺を $V_{i-1}$, $V_i$, $V_{i+1}$ について整理すると

$$\rho V_i = A_i V_{i-1} + B_i V_i + C_i V_{i+1} \tag{13}$$

$$A_i = \frac{\sigma^2 x_i^2}{2(\Delta x)^2}$$

$$B_i = -\left(\frac{\mu x_i}{\Delta x} + \frac{\sigma^2 x_i^2}{(\Delta x)^2}\right)$$

$$C_i = \frac{\mu x_i}{\Delta x} + \frac{\sigma^2 x_i^2}{2(\Delta x)^2}$$

となる。これに境界条件 $V_0 = V_1$, $V_m = V_{m+1}$ を課す。$V = [V_1, V_2, V_3, \ldots, V_m]'$ とすると、(13) はベクト

ルと行列を用いて

$$\rho V = PV$$

と表される。$P$ は三重対角行列であり

$$P = \begin{bmatrix} A_1+B_1 & C_1 & & & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & & \mathbf{0} & \\ & A_3 & B_3 & C_3 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \mathbf{0} & & A_{m-2} & B_{m-2} & C_{m-2} & \\ & & & & A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} \\ & & & & & A_m & B_m+C_m \end{bmatrix}$$

となる。(12) は

$$\min[\rho V - PV, V - S] = 0$$

によって近似する。この式は

$$(V-S)'(\rho V - PV) = 0$$

$$V - S \geq 0$$

$$\rho V - PV \geq 0$$

と同値である。２番目と３番目の条件は

$$(V_i - S_i)(\rho V_i - (PV)_i) = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

となることを意味する。ここで $z = V - S,\ Q = \rho I - P,\ u = QS,$ とおくと、上の式は

$$\begin{aligned} & z'(Qz+u) = 0 \\ & z \geq 0 \\ & Qz + u \geq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

と書ける。これは $z$ に関する線形相補性問題である[2)]。この問題は MATLAB のソルバーを使うと簡単に解ける。

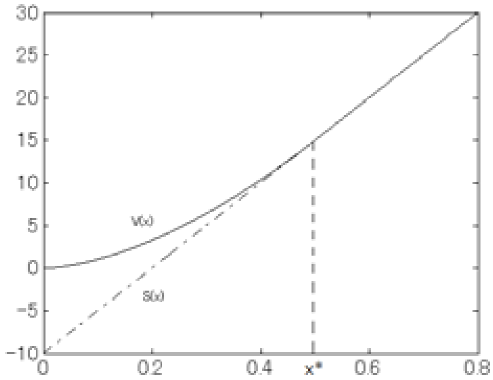
実際にモデルを解いてみよう。パラメータは $\rho = 0.05,\ \mu = 0.03,\ \sigma = 0.03$ で、$I = 10$ とする。区間 [0.01,0.8] に 1,000 の分点をとる。すぐに投資を行うと

$$S(x) = \frac{x}{\rho - \mu} - I = 50x - 10$$

の収益が得られる。図1は数値計算の結果を示している。二つの曲線は $x = 0.4911$ で接している。この場合、臨界値は正確に求めることができる[3)]。臨界値は $X^* = 0.5$ であり、接点の値にほぼ等しい。したがって変分不等式の解は最適な投資のタイミングを与える。パラメータを変えると $X^*$ も変化する。しかしパラメータの値によっては (14) は解をもたない。解が存在するためには、$Q$ は半正定値行列でなければならない。ここでは企業収益について幾何ブラウン運動を仮定し

たが、他の確率過程でもかまわない。

図 1 設備投資問題の価値関数




## 5. 企業の参入・退出問題

### 5.1 参入・退出モデル

最後に第２節で説明した方法を Hopenhayn(1992) の参入・退出モデルに適用する。日本と異なり欧米諸国では企業の参入・退出は珍しいことではない。参入・退出は１回限りの決定であり、典型的なタイミングの問題である。しかし離散時間のモデルは扱い難く数値計算の観点から問題が多い。ここでは連続時間のモデルに変更して数値解析を行う。

ある財を生産している産業があり、各企業は与えられた価格と賃金のもとで利潤を最大化している。財に対する（逆）需要関数を $p = D(Q)$ とする。$Q$ は産業全体の生産量である。賃金は $w = W(N)$ で与えられる（$N$ は雇用量）。企業の生産関数を $q = f(z, n)$ とする。$q$ は生産量で $n$ は労働投入であり、$z$ は全要素生産性を表す。利潤は

$$\pi(z, n) = pf(z, n) - wn - c_f$$

で与えられる。ここで $c_f$ は参入に伴う機会費用である。企業は予想利潤の現在価値を最大化する。

$$V(z) = \max_{\tau, n_t}\left[E_0\int_0^{\tau} e^{-\rho t}\pi(z_t, n_t)dt + e^{-\rho\tau}V^*\right]$$

ここで $V^*$ は産業から退出したときのスクラップ価値である。この価値が高いほど退出する企業の割合は高くなる。生産性ショックはつぎの拡散過程に従う。

$$dz_t = \mu(z_t)dt + \sigma(z_t)dW_t,\quad z_0 = z$$

既存の企業は $z$ を観察して産業に留まるか、撤退するか決定する。

期間の長さは $\Delta$ で、割引率を $e^{-\rho\Delta} \cong 1 - \rho\Delta$ とする。上の最適化問題に動的計画法を適用すると

$$V(z_t) = \max \pi(z_t, n_t)\Delta + (1-\rho\Delta)E\left[V(z_{t+\Delta})\middle|z_t\right]$$

となる。これより

$$\rho\Delta V(z_t) = \max_{n_t} \pi(z_t, n_t)\Delta + (1-\rho\Delta)\{E[V(z_{t+\Delta}) \mid z_t] - V(z_t)\}$$

となり、両辺を Δ で割って Δ → 0 とすると

$$\rho V(z_t) = \max_{n_t} \pi(z_t, n_t) + \frac{E[dV(z_t) \mid z_t]}{dt}$$

$dV(z_t)$ に伊藤の公式を適用すると

$$dV(z_t) = \left(V'(z_t)\mu(z_t) + \frac{1}{2}V''(z_t)\sigma^2(z_t)\right)dt + V'(z_t)\sigma(z_t)dW_t$$

これより

$$E[dV(z_t) \mid z_t] = \left(V'(z_t)\mu(z_t) + \frac{1}{2}V''(z_t)\sigma^2(z_t)\right)dt$$

となり、上の式に代入すると HJB 方程式

$$\rho V(z_t) = \max_{n_t} \pi(z_t, n_t) + V'(z_t)\mu(z_t) + \frac{1}{2}V''(z_t)\sigma^2(z_t) \tag{15}$$

を得る。企業は生産性ショックに基づいて参入・退出を決める。つまり $z^* \leq z \leq 1$ であれば

$$V(z) > V^*, \quad \rho V(z) = \pi(z, n) + V'(z)\mu(z) + \frac{1}{2}V''(z)\sigma^2(z)$$

だから産業に留まる。一方、$0 \leq z < z^*$ であれば

$$V(z) = V^*, \quad \rho V(z) \geq \pi(z, n) + V'(z)\mu(z) + \frac{1}{2}V''(z)\sigma^2(z)$$

により退出する。これらの条件は変分不等式

$$\min\left\{\rho V(z) - \pi(z, n) - V'(z)\mu(z) - \frac{1}{2}V''(z)\sigma^2(z), V(z) - V^*\right\} = 0 \tag{16}$$

で表すことができる。

一部の企業が退出する一方で新規参入する企業もある。参入企業の全要素生産性は $\chi(z)$ の確率分布にしたがう。参入費用を $c_e$ とする。参入障壁がなければ企業は $E[V(z)] = c_e$ となるまで参入するであろう。しかし参入障壁があればこの条件は成り立たない。かわりに参入率を

$$\alpha = \alpha^* + \beta\left(\int_0^1 V(z)\chi(z)dz - c_e\right) \tag{17}$$

とする。$\beta$ が大きいほど参入率は高くなる。一般的な条件のもとで初期状態からスタートした産

業は長期的に定常状態に達する。定常状態における生産規模の分布を $g(z)$ とすると

$$-(\mu(z)g(z))'+\frac{1}{2}(\sigma^2(z)g(z))''+\alpha\chi(z)=0 \tag{18}$$

を満たす。

以上の結果をまとめると、長期均衡ではつぎの式が成り立つ。

$$\min\left\{\rho V(z)-\pi(z,n)-V'(z)\mu(z)-\frac{1}{2}V''(z)\sigma^2(z), V(z)-V^*\right\}=0$$

$$-(\mu(z)g(z))'+\frac{1}{2}(\sigma^2(z)g(z))''+\alpha\chi(z)=0 \tag{19}$$

$$\alpha=\alpha^*+\beta\left(\int_0^1 V(z)\chi(z)dz-c_e\right)$$

$$p=D(Q)$$

$$w=W(N)$$

$$Q=\int_0^1 q(z)g(z)dz$$

$$N=\int_0^1 n(z)g(z)dz$$

Hopenhayn(1992) の定理２によると、適当な条件のもとで離散時間のモデルには競争均衡が存在する。連続時間のモデルでも同様の定理が成り立つ。しかし (19) を満たす $V(z)$, $g(z)$, $p$, $w$, $Q$, $N$ を解析的に求めることは難しい。かわりに数値的な方法で近似解を求めた。

## 5.2 数値解

$z$ の区間を [0,1] として、$S=[z_1, z_2, \ldots, z_m]$ で近似する。$V(z_i)$ と $g(z_i)$ の近似値を $V_i$, $g_i$ として、$V=[V_1, V_2, \ldots, V_m]'$ , $g=[g_1, g_2, \ldots, g_m]'$ とおく。前節の行列 $P$ を用いて (16) の変分不等式は

$$\min[\rho V-PV-\pi, V-V^*]=0 \tag{20}$$

と表される。$z$ の上限と下限に対応して、$V(z)$ には境界条件

$$V'(0)=V'(1)=0 \tag{21}$$

を課す。(20) の条件は

$$(V-V^*)'(\rho V-PV-\pi)=0$$

$$V-V^*\geq 0$$

$$\rho V-PV-\pi\geq 0$$

と同値である。ここで $x=V-V^*$, $Q=\rho I-P$, $u=-\pi+QV^*$ とすると

$$x'(Qx+u)=0$$

$$x\geq 0 \tag{22}$$

$$Qx+u\geq 0$$

が成り立つ。これは $x$ に関する線形相補性問題である。$x$ が決まると、$V = x + V^*$ となる。

生産量の分布を調べるために、$S$ を $S_1 = [z_1, z_2,\ldots, z_l]$ と $S_2 = [z_{l+1}, z_{l+2},\ldots, z_m]$ に分ける。$S_1$ の領域にある企業は退出し、$S_2$ の領域では生産を続行する。(18) の一部を修正したコルモゴロフ方程式を

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ji} g_j + \alpha\chi_i = 0$$

$$g_j = 0,\ z_j \in S_1 \tag{23}$$

によって近似する。これは行列を用いてつぎのように表される。

$$\begin{bmatrix} I_{l,l} & 0_{l,m-l} \\ \multicolumn{2}{c}{\widetilde{P}_{m-l,m-l}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_l \\ g_{l+1} \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha\chi_{l+1} \\ \vdots \\ \alpha\chi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

左辺の行列は正則行列であり、この式から $g$ が決まる。

市場均衡はつぎの手順で計算した。

［ステップ１］ 賃金の初期値 $w^0$ を与える。

［ステップ２］(1) 価格の初期値 $p^0$ を定める。

(2) 利潤を最大化する労働投入と生産量および利潤を求める。

(3) 線形相補性問題を解いて価値関数を求める。

(4) (17) の参入率と (23) から $g$ を計算する。

(5) 総生産 $Q$ を計算して新しい価格 $p^{k+1}$ を求める。$|p^{k+1} - p^k| < \varepsilon$ であれば次のステップ３へ進む。そうでなければ (2) へ戻る。

［ステップ３］ $g$ から $N$ を求めて賃金を変更する。$|w^{k+1} - w^k| < \varepsilon$ であれば終了し、そうでなければステップ２へ戻る。

このアルゴリズムは２重ループを含んでいるが、それほど計算時間はかからない[4)]。計算にあたって表１に示した関数を用いた。

(17) の係数は $\alpha^* = 0.2,\ \beta = 30$ であり、割引率は $\rho = 0.05$ とする。生産性ショックはつぎの幾何ブラウン運動に従う。

$$dz = -0.01zdt + 0.01zdW$$

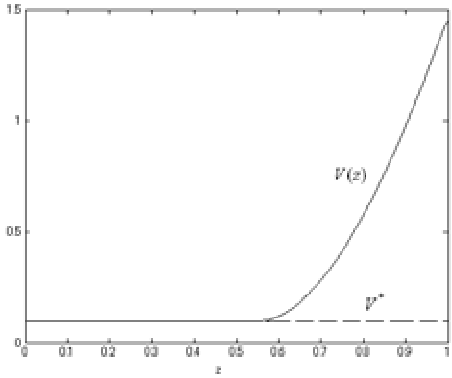
他の確率過程にすると (22) の不等式が解をもたなくなる場合がある。

表１　計算で使用した関数

| | |
|---|---|
| 生産関数 | $q = z\sqrt{n}$ |
| 逆需要関数 | $p = 1/\sqrt{Q}$ |
| 労働供給関数 | $w = N^{0.6}$ |
| 利潤関数 | $\pi = pq - wn - 0.05$ |
| 参入企業の全要素生産性 | $\chi(z) = 1/0.4\ (0.6 \le z \le 1)$ |

図２は数値計算で求めた価値関数を示している。$0.554 < z \le 1$ の領域では $V(z) > V^*$ となり、退出は起こらない。$0 \le z \le 0.554$ の領域では一部の企業が退出して別の企業が参入してくる。境界点を別途に計算する必要はない。またバリュー・マッチングとスムース・ペースティングの条件は自動的に満たされる。スクラップ価値が低くなると境界値は下がると考えられる。この点を確かめるために $V^* = 0$ として計算すると、境界値は $z = 0.524$ となる。したがってより多くの企業が産業に留まるようになる。固定費用 $c_f$ も参入・退出の決定に影響を与える。固定費用がゼロであれば、退出領域は $0 \le z \le 0.237$ に縮小する。総生産は 1.665 から 3.07 に増加し、財の価格は 0.775 から 0.571 に低下する。同時に賃金は 0.849 から 0.952 に上昇し、雇用量は 0.761 から 0.921 に増加する。

図２　参入・退出企業の価値関数




つぎに図３は生産規模の分布状態を表している。途中で切断されているのは生産性の低い企業は退出するからである。生産は狭い領域に集中している。現在の簡単なモデルを精緻化すればパレート型の分布が得られるかもしれない。図4 は全要素生産性と生産量、利潤、および雇用量との関係を示している。生産性の高い企業ほど雇用を拡大し生産と利潤は大きくなる。パラメータの値によって曲線の位置は変わるが、基本的な形は変わらない。

図３　生産規模の分布

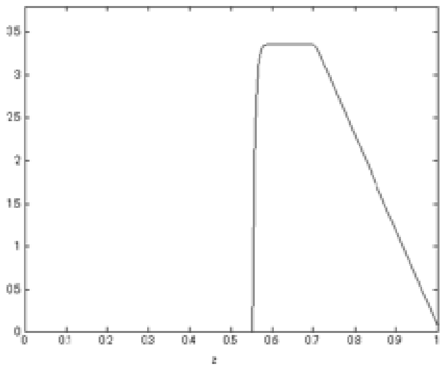
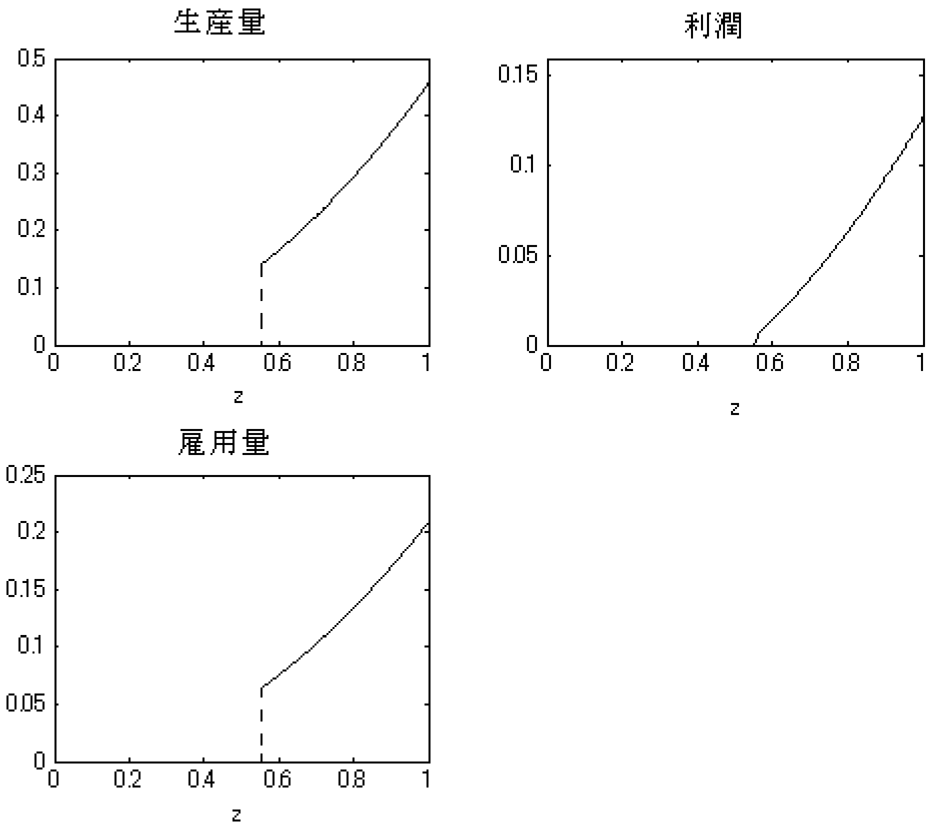



図４　全要素生産性と生産量、利潤、雇用量の関係



## 6. 結語

特定の行動をとる最適なタイミングを決定する方法は多くの問題に応用されている。ここではアメリカン・オプションと企業の設備投資、および企業の参入・退出の問題に応用した。従来のアプローチと異なり、動的計画法と変分不等式を組み合わせた方法を用いた。この方法の利点はベルマン方程式の解が自動的に得られることである。通常は反復計算して解を求めるがその必要はない。このため市場均衡を求める最後の問題では計算時間を大幅に節約できる。またストッピング・ルールの境界点も得られる。さらにバリュー・マッチング条件やスムース・ペースティング条件を考慮する必要もない。得られた解はこれらの条件を満たしているからである。

## 注

1) 一般に

$$E\left[\int_0^\infty e^{-\rho t} X^\lambda dt\right] = X^\lambda / [\rho - \mu\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda(\lambda-1)]$$

となる。ただし分母は正でなければならない。

2) 正方行列 $M$ とベクトル $q$ が与えられたとき

$$z = Mx + q$$

$$x'z = 0$$

$$x \geq 0,\ z \geq 0$$

を満たす $x$ と $z$ を求める問題を線形相補性問題という。

3) (11) は２階の微分方程式であり、一般解は

$$V(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}$$

となる。$\lambda_1 > 1,\ \lambda_2 < 0$ は特性方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda - \rho = 0$$

の根である。$V(0) = 0$ より $C_2 = 0$ でなければならない。バリュー・マッチングとスムース・ペースティング条件により

$$X^* = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}(\rho - \mu)I$$

$$C_1 = \left(\frac{X^*}{\rho - \mu} - I\right)\left(\frac{1}{X^*}\right)^{\lambda_1}$$

となる。パラメータの値を代入すると厳密解は

$$X^* = 0.5,\ V(x) = 47.56x^{1.66}$$

となる。

4) 賃金を一定とすれば計算時間は半分で済むが、労働供給の影響を見るために賃金を内生化した。賃金が変化すれば生産量の変動は小さくなる。

## 参考文献

Dixit, A. (1993) *The Art of Smooth Pasting*, Routledge.

Hopenhayn, Hugo A. (1992) “Entry, Exit, and Firm Dynamics in Long Run Equilibrium”, *Econometrica*, Vol.60, 1127-1150.

Huang, Jacqueline and Jong-Shi Pang. (1998) “Option Pricing and Linear Complementarity”, *Journal of Computational Finance*, Vol.2, 31-60.

Oksendal, B. (1995) *Stochastic Differential Equations:An Introduction with Applications*, Springer（谷口説男訳『確率微分方程式』丸善出版、2012）

Stokey, N. L. (2008) *The Economics of Inaction:Stochastic Control Models with Fixed Costs*, Princeton University Press.