人口分布の数量分析（計算経済学の研究その13）

Numerical Analysis of Population Distribution

釜　　国男
Kunio KAMA

1. 都市の人口分布

多数のサンプルから母集団の性質を調べる場合、通常は正規分布を仮定する。中心極限定理によって正規分布の仮定が当てはまるからである。しかし最近注目されているビッグデータではべき分布となる場合が多い。べき分布とは、データの多くはゼロに近い値をとるが、ごく一部は極端な値をとる分布のことである。個人の資産や所得、都市人口、株価や為替の変動、企業の売上高、地震の発生頻度、英単語の出現頻度、ウェブサイトの閲覧数など多くの現象はべき分布に従うことが分かっている[1)]。一例として、図1に日本の都市人口の分布を示した。横軸には県庁所在地の人口 (2003年9月、東京都は新宿区)、縦軸は順位の対数値をとっている。トップの横浜市は ln(1) で、最下位の山口市は ln(47) とする。両対数回帰式を当てはめると、

$$\ln Rank = 17.191 - 1.094 \ln Size, \quad R^2 = 0.958$$

$$\qquad (38.8) \qquad (-32.3)$$

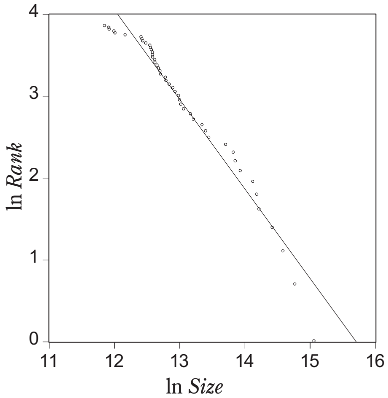
となる (括弧内は t 値)。人口の係数は統計的に有意で −1 となる。他の年についても同じような結果が得られる。人口を S で表すと、$P(S > x) = a/S$ となる。Krugman(1996) は全米135の都市について

$$\ln Rank = 10.53 - 1.005 \ln Size, \quad R^2 = 0.986$$

$$\qquad (-100.5)$$

という結果を得ている。米国でも人口の係数は −1 となる。人口の他にもいろいろな変数について同様の関係が見られる。

図1 都市人口の順位と人口



歴史的には1896年にイタリアの経済学者パレートは、ヨーロッパ諸国の個人所得についてパレート分布

$$P(S > x) = k / x^{\zeta}$$

が成立していることを発見した。$\zeta = 1$ である場合、とくにジップの法則 (Zipf's law) と呼ぶ。上の結果によると、県庁所在地の人口にはジップの法則が当てはまる[2)]。人口がべき分布に従う理由について Champernowne(1953)、Simon(1955)、Madelbrot(1963) は重要な洞察を与えている。今でも活発な議論が続いている。さまざまな分野で見られるべき乗則を一般的に論じても意味がないので、ここでは都市人口に絞って議論する。

2. ランダム成長仮説[3)]

ランダム成長仮説は、おそらく人口分布に関する最も重要な理論である。都市の総数は一定で、総人口に占める都市 $\boldsymbol{i}$ の割合をS_t^iで表す。S_t^iはつぎの確率的乗数過程に従うと仮定する。

$$S_{t+1}^i = \gamma_{t+1}^i S_t^i \tag{1}$$

つまり人口は t から t+1 にかけてγ_{t+1}^i倍に増加する。γ_{t+1}^iは密度関数$\boldsymbol{f}(\gamma)$ をもつ独立した確率変数である。

$$G_t(S) = P(S_t^i > S)$$

とすると

$$G_{t+1}(S) = P(S_{t+1}^i > S) = P(\gamma_{t+1}^i S_t^i > S)$$

$$= P\left(S_t^i > \frac{S}{\gamma_{t+1}^i} \right)$$

$$=\int_0^\infty G_t\left(\frac{S}{\gamma}\right)f(\gamma)d\gamma$$

となる。定常状態の分布を $\boldsymbol{G(S)}$ とすると

$$G(S)=\int_0^\infty G\left(\frac{S}{\gamma}\right)f(\gamma)d\gamma \tag{2}$$

$\boldsymbol{G(S)=k/S^{\zeta}}$ とすれば

$$\int_0^\infty \gamma^{\zeta} f(\gamma)d\gamma=1$$

つまり

$$E[\gamma^{\zeta}]=1 \tag{3}$$

が成り立つ。パレート分布の場合、$\boldsymbol{\zeta}$ は (3) を満たす。ただし、後で述べるように定常分布に収束するためにはモデルを一部変更する必要がある。(1) から

$$\mathrm{var}(\ln S_t^i)=\mathrm{var}(\ln S_0^i)+\mathrm{var}(\ln\gamma)t$$

となり、$\ln S_t^i$ の分散は時間とともに大きくなる。したがって定常分布が存在するためには、何らかの摩擦要因を取り入れる必要がある。総人口の成長率を $\boldsymbol{\mu}$、初期人口を $\boldsymbol{P_0}$ とすると、$\boldsymbol{t}$ 期には $P_t=P_0e^{\mu t}$ となる。都市 $\boldsymbol{i}$ の人口は幾何ブラウン運動

$$dP_t^i=\mu_iP_t^i dt+\sigma P_t^iW_t^i$$

で記述されるとする。$\boldsymbol{\mu_i}$ はドリフト係数、$\boldsymbol{\sigma}$ は拡散係数、W_t^i は標準ブラウン運動を表す。人口の割合を $S_t^i=P_t^i/P_t$ とする。

$$dS_t^i=\frac{1}{P_0e^{\mu t}}(dP_t^i-\mu P_t^i dt)$$

から

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i}=\frac{dP_t^i}{P_t^i}-\mu dt$$

$$=\mu_i dt+\sigma dW_t^i-\mu dt$$

$$=(\mu_i-\mu)dt+\sigma dW_t^i$$

となる。$\boldsymbol{g_i=\mu_i-\mu}$ とすると

$$dS(t)=gS(t)dt+\sigma S(t)dW(t) \tag{4}$$

と表される ($\boldsymbol{i}$ は省略)。この方程式の解は

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(g - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right)$$

あるいは

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \left(g - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)$$

で与えられる。$S(0) = 1$ とすると

$$\ln S(t) \sim N\left(\left(g - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$$

となり分散は時間とともに増大する。また $g = 0$ であれば人口は限りなく 0 に近づく。このため定常分布が存在するためには摩擦要因が必要である。最も簡単な方法は、人口に下限を設けることである。日本の法律では、市となるには人口は 5 万人以上でなければならない。次に示すように人口に下限があればべき乗則が成り立つ。

人口について反射壁をもつつぎの幾何ブラウン運動を仮定する。

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \begin{cases} gdt + \sigma dW(t) & if\ \ S(t) > S_{\min} \\ \max\{gdt + \sigma dW(t), 0\} & if\ \ S(t) \le S_{\min} \end{cases} \tag{5}$$

下限に達すると、$S_{\min}$ の人口をもつ別の都市で置き換えられる。推移密度関数 $f(S,t)$ はつぎのコルモゴロフ方程式に従って変化する。

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial S}[gSf(S,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}[\sigma^2 S^2 f(S,t)] \tag{6}$$

定常状態では

$$0 = -\frac{d}{dS}[gSf(S)] + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dS^2}[\sigma^2 S^2 f(S)] \tag{7}$$

が成り立つ。この常微分方程式は

$$f(S) = CS^{-\zeta-1} \tag{8}$$

という解をもつ。(7) に代入すると

$$0 = -\frac{d}{dS}[gSCS^{-\zeta-1}] + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dS^2}[\sigma^2 S^2 CS^{-\zeta-1}]$$

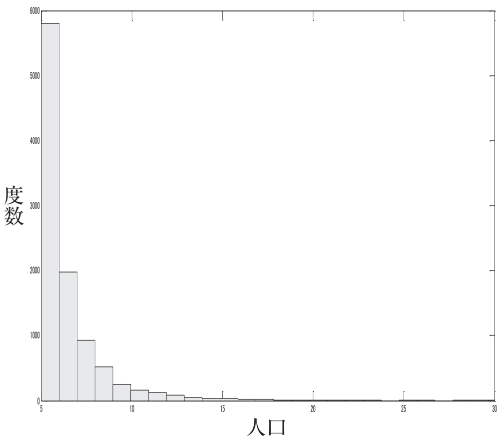
$$= CS^{-\zeta-1}\left[g\zeta + \frac{\sigma^2}{2}(\zeta-1)\zeta\right]$$

これより $\zeta = 0$、または

$$\zeta = 1 - \frac{2g}{\sigma^2} \tag{9}$$

となる。積分可能であるためには $\boldsymbol{\zeta} > 1$、つまり $\boldsymbol{g} < 0$ でなければならない。このとき人口は減少するが、反射壁でブロックされて 0 になることはない。図2 は $\boldsymbol{g} = -1.6$, $\boldsymbol{\sigma} = 1.0$, $\boldsymbol{S}_{\min} = 5$ として計算機でシミュレーションを行った結果である。1万のサンプルパスを生成して、$\boldsymbol{t} = 2$ における人口を計算した。$\boldsymbol{\zeta} = 4.2$ であり、ごく少数のメガ都市が存在する。

図２ 人口の分布



(8) の係数は $C = \zeta S_{\min}^{\zeta}$ となる。$f(S) = \zeta S_{\min}^{\zeta} S^{-\zeta-1}$ から

$$P(S > x) = \left(\frac{x}{S_{\min}}\right)^{-\zeta} \tag{10}$$

となり、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})$ は一種のパレート分布である。平均人口は

$$\bar{S} = \int_{S_{\min}}^{\infty} Sf(S) = \int_{S_{\min}}^{\infty} S\zeta S_{\min}^{\zeta} S^{-\zeta-1} = \frac{\zeta}{\zeta-1} S_{\min}$$

であり

$$\zeta = \frac{1}{1 - S_{\min}/\bar{S}}$$

となる。$S_{\min} << \bar{S}$ であれば $\zeta \cong 1$ となり、ジップの法則が成り立つ。県庁所在地の場合、$\boldsymbol{S}_{\min} = 5$ 万人を平均人口で割ると、$S_{\min}/\bar{S} = 0.075$ となる。$\boldsymbol{\zeta} = 1.081$ であり回帰係数にほぼ等しい。以上のように、下限があればランダム成長過程はパレート分布を生み出す。

3. 都市の死滅と再生

これまで都市の総数は一定としてきたが、隣接都市との合併や新しい都市の誕生によって総数が変化すれば下限を設ける必要はない。どの都市も δ の確率で消滅し、S_* の規模ですぐに再生すると仮定しよう。既存の都市には (4) が当てはまる。(6) と (7) をつぎのように修正する。

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial S}[gSf(S,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}[\sigma^2 S^2 f(S,t)] - \delta f(S,t) \tag{11}$$

$$0 = -\frac{d}{dS}[gSf(S)] + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dS^2}[\sigma^2 S^2 f(S)] - \delta f(S)\ ,\ (S \neq S_*) \tag{12}$$

$f(S) = CS^{-\zeta-1}$とすると

$$0 = -\frac{d}{dS}[gSS^{-\zeta-1}] + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dS^2}[\sigma^2 S^2 S^{-\zeta-1}] - \delta S^{-\zeta-1}$$

つまり

$$0 = \zeta g + \frac{\sigma^2}{2}\zeta(\zeta-1) - \delta$$

が成り立つ。これは ζ に関する2次方程式であり、正の根 ζ_+ と負の根 ζ_- がある。定常分布は

$$f(S) = \begin{cases} C(S/S_*)^{-\zeta_- -1} & ,\ (S < S_*) \\ C(S/S_*)^{-\zeta_+ -1} & ,\ (S > S_*) \end{cases} \tag{13}$$

と表される。ここで $C = -\zeta_+\zeta_- /(\zeta_+ - \zeta_-)$ である。$S > S_*$ では $f'(S) < 0$ となる。平均人口は

$$\bar{S} = S_* \frac{\zeta_+\zeta_-}{(\zeta_+ - 1)(1-\zeta_-)}$$

で与えられる。$\zeta_+\zeta_- = -2\delta/\sigma^2$ となるので

$$(\zeta_+ - 1)\left(1 + \frac{2\delta/\sigma^2}{\zeta_+}\right) = \frac{S_*}{\bar{S}} 2\delta/\sigma^2$$

が成り立つ。$S_*/\bar{S} \to 0$ または $\delta \to 0$ であれば、$\zeta_+ \to 1$ となる。したがって $S_* << \bar{S}$ であるか、都市の消滅率が低いとジップの法則が成り立つ。しかし、実際にこれらの条件が成り立つとは考えにくい。

4. べき乗則からの逸脱

図1を見ると、回帰直線の左端ではデータ点は直線の下にある。したがってジブラの法則は人口の少ない都市には当てはまらない。この法則が成り立たない場合について検討しよう。(4) をつぎのように拡張する。

$$dS(t) = g(S)Sdt + \sigma(S)SdW(t) \tag{14}$$

平均成長率と分散は人口の関数である。コルモゴロフ方程式は

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial S}[g(S)Sf(S,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}[\sigma^2(S)S^2 f(S,t)] \tag{15}$$

となる。定常分布は微分方程式

$$0 = -\frac{d}{dS}[g(S)Sf(S)] + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dS^2}[\sigma^2(S)S^2 f(S)] \tag{16}$$

の解である。この場合、ジップ指数 $\zeta = -Sdf(S)/f(S)dS$ は

$$\zeta = 1 - 2\frac{g(S)}{\sigma^2(S)} + \frac{S}{\sigma^2(S)}\frac{d\sigma^2(S)}{dS}$$

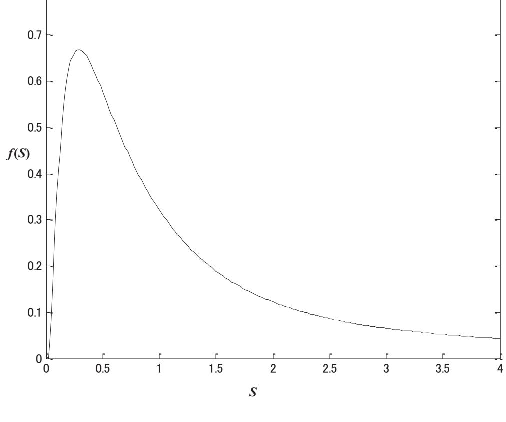
で与えられる。 $g(S)$ は平均成長率からの乖離を表す。成長率は均一で分散も一定であれば、$\zeta = 1$ となる。人口が多いほど分散が小さいと $\zeta < 1$ となり、べき乗則は成り立たない。例えば

$$g(S) = -\gamma(1 - \mu/S)$$

$$\sigma(S) = \sigma S^{\alpha-1}$$

とする。解析解はないので数値計算によって $f(S)$ を求めた。図3は $\gamma = 0.2,\ \mu = 0.3, \alpha = 0.6, \sigma = 0.5$ とした場合の定常分布を示している。$S \geq \mu$ の領域では $f'(S) < 0$ であり、ガンマ分布に似た形をしている。ジップ指数は1より大きくなる。したがってジブラの法則を仮定しないと、ジップの法則は成り立たないことがわかる。

図3 ガンマ型分布



$\zeta \cong 1$ となるケースが多いので、人口の成長率と分散に大きな差はないのかもしれない。この点は実際のデータで調べる必要がある。

5. Kesten 過程

べき分布を生み出すもう一つのケースは、つぎの Kesten 過程である。

$$S_t = A_t S_{t-1} + B_t, \quad t = 1,2,.. \tag{17}$$

ここで $\boldsymbol{A_t}$ と $\boldsymbol{B_t}$ は iid の確率変数とする。$\boldsymbol{B_t}$ は $\boldsymbol{t}$ 期に追加される人口で、$\boldsymbol{A_t}$ は固有の増減を表す。$E(S_t) = \bar{S}$, $E(B_t) = \bar{B}$, $\bar{B} < S$ とする。定常状態で両辺の期待値をとると

$$\bar{S} = E(A)\bar{S} + \bar{B}$$

となる。これより

$$E(A) = 1 - \frac{\bar{B}}{\bar{S}} < 1$$

となる。つぎの条件を満たすと、$\boldsymbol{S_t}$ は指数 ζ のべき分布に収束する[4)]。

(i) $E[|A|^{\zeta}] = 1$ となる $\zeta > 0$ が存在する。

(ii) $E[|A|^{\zeta} \max(\ln(A),0)] < \infty$ となる。

(iii) $E[|B|^{\zeta}] < \infty$ となる。

(iv) $B/(1-A)$ の分布は退化しない。

(v) $\ln|A|$ の分布は整数に集中しない。

また

$$\lim_{x\to\infty} x^{\zeta} P(S > x) = \alpha_+$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\zeta} P(S < -x) = \alpha_-$$

が存在し、α_+ と α_- のすくなくとも一つは正である。

$\boldsymbol{A_t}$ と $\boldsymbol{B_t}$ の分布を特定化して、$\boldsymbol{S_t}$ の密度関数を求めてみよう。$\boldsymbol{A_t}$ は対数正規変数で、$\ln(A) \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする。$\boldsymbol{B_t}$ は [0,1] の一様分布とする。$E[|A|^{\zeta}] = \exp(\zeta\mu + \zeta^2\sigma^2/2)$ であり、条件 (i) から

$$\exp(\varsigma\mu + \varsigma^2\sigma^2/2) = 1$$

つまり

$$\zeta\mu + \zeta^2\sigma^2/2 = 0$$

これより

$$\mu = -\zeta\sigma^2 / 2$$

となる。A_t の期待値は

$$E(A) = 1 - \frac{\bar{B}}{\bar{S}} = \exp(\mu + \sigma^2 / 2) = \exp[(1-\zeta)\sigma^2 / 2]$$

これより

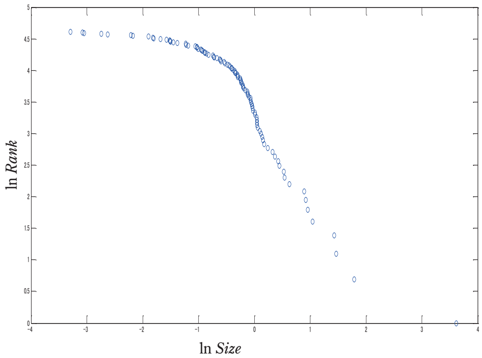
$$\ln(1 - \bar{B}/\bar{S}) = (1-\zeta)\sigma^2 / 2$$

となり

$$\zeta = 1 - 2\ln(1 - \bar{B}/\bar{S}) / \sigma^2$$

を得る。$\bar{B}/\bar{S} \to 0$ となると、$\zeta \to 1$ 、つまりジップの法則が成り立つ。パラメータを $\bar{B} = 1/2$，$\bar{S} = 1$，$\sigma^2 = 2$ とすると、$\zeta = 1 + \ln(2)$，$\mu = -\zeta$ ，$E(A) = 1/2$ となる。図4は計算機によるシミュレーションの結果を示している。縦軸は順位の対数で、横軸は S の対数である。一定規模以上の人口については、べき分布がよく当てはまる (ζ = 1.7)。ここでは対数正規分布と一様分布 を用いたが、ほかの分布についても同様の結果が得られる。実際のデータからパラメータを推計してモデルの精度を調べることもできる。Kesten 過程はべき分布を生み出すことができるが、経済学的な裏付けがない。統計モデルの限界と言えよう。

図４ 人口の分布



6. ジブラの法則

(4) は人口成長率の平均値と分散は人口に依存しないというジブラの法則にもとづく。この法則が成り立つ理由を簡単なモデルで説明しよう [5]。都市 $\boldsymbol{i}$ の住民は消費 $\boldsymbol{c}$ から $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}_{it}\boldsymbol{c}$ の効用を得る。$\boldsymbol{a}_{it}$ は大気汚染、交通渋滞、治安、教育などの居住性を表し、互いに独立で同じ分布に従う。人口は他の都市からの流出入によって変化する。個人は 2 期間生存し、若年世代と老年世代が共存する。老人の死亡率を δ とする。賃金を $\boldsymbol{w}_{it}$ とすると、$\boldsymbol{a}_{it}\boldsymbol{w}_{it}$ が最大となる都市を選んで居住する。均衡状態ではすべての都市について

$$a_{it}w_{it} = u_t$$

が成り立つ。N_i^yの若者はN_i^oの老人が住んでいる都市を選択する。1次同次の生産関数、$F(N_i^o, N_i^y) = N_i^o f(N_i^y / N_i^o)$を仮定する。若者の賃金は$w_i^y = f'(N_i^y / N_i^o)$である。上の式に代入すると、$N_i^y = N_i^o f'^{-1}(u_t / a_{it})$となる。増加人口は

$$\Delta N_{it} = N_{it}^y - \delta N_i^o = N_i^o [f'^{-1}(u_t / a_{it}) - \delta]$$

増加率は

$$\gamma_{it} = \Delta N_{it} / N_{it} = f'^{-1}(u_t / a_{it}) - \delta$$

となる。a_{it}はiidと仮定しているので増加率は人口規模に依存しない。

多くの国はいくつかの地域から構成されている。各地域で(10)が成り立つと、国全体でもパレート法則が当てはまる。Rの地域があり、地域rにおいて

$$P_r(S > x) = \left(\frac{x}{S_{\min}^r}\right)^{-\zeta} = a_r x^{-\zeta}$$

が成り立つとする。各都市がrに属する確率をλ_rとする。国全体では

$$P(S > x) = \sum_{r=1}^{R} \lambda_r P_r(S > x) = \sum_{r=1}^{R} \lambda_r a_r x^{-\zeta}$$

$$= (\sum_{r=1}^{R} \lambda_r a_r) x^{-\zeta} = a x^{-\zeta} \qquad (18)$$

となる。例えば米国の各州でパレート法則が成り立つと、全米でも同じ法則が当てはまる。

都市の増加で人口分布はどのように変化するだろうか。都市の増加率νが既存都市の人口成長率gを下回ると、$\zeta = 1$となる定常分布が存在する。$\nu > g$であれば$\zeta > 1$となる。$\nu > g$となるケースを想定しよう。人口の分布関数は

$$\frac{\partial p(S,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial}[gSp(S,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}[\sigma^2 S^2 p(S,t)] - \nu p(S,t) \qquad (19)$$

を満たし、定常状態では

$$0 = -\frac{d}{dS}[gSp(S)] + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dS^2}[\sigma^2 S^2 p(S)] - \nu p(S) \qquad (20)$$

が成り立つ。$p(S) = CS^{-\zeta-1}$とすると、ζは

$$m(\zeta) = \zeta^2 - (1 - 2g/\sigma^2)\zeta - 2\nu/\sigma^2 = 0$$

の正根となる。$m(0) < 0$, $m(1) < 0$から$\zeta > 1$となることが分かる。ただし、$\nu > g$という仮定は現実的ではない。戦後の日本では合併によって都市の総数は減少しており、$\zeta = 1$となる可能性が高い。

7. 結論

ジップの法則は英単語の出現頻度、都市の人口、高額所得者の収入、地震の規模など様々な現象に当てはまるかなり一般的な法則である。それぞれのケースで理由は異なるが、人口や所得分布については Champernowne と Simon のランダム成長仮説が重要である。ただし、定常分布となるには法定人口のような摩擦要因が必要である。他にもいろいろな要因が考えられるが、基本的なメカニズムはまだ分かっていない。実証研究の面でも課題がある。データの関係で比較的大きな都市に限られ、小さな都市はカバーしていない。町村レベルでもべき乗則が成り立つのか興味がある。少子高齢化社会を迎えようとしているわが国では、人口分布のメカニズムを解明することは地域政策を考える上できわめて重要である。

注）

1) べき分布に関して多くの論文が発表されている。企業規模 : Axtell(2001)、Luttmer(2007)、Fujiwara (2004)、Okuyama ***et al.*** (1999)、ネットワーク : Jackson (2009)、単語の出現頻度 : Zipf (1949)、CEO の報酬 : Roberts (1956), Baker ***et al.*** (1988), Barro and Barro (1990), Cosh (1975), Frydman and Saks (2007), Rosen (1992) などの研究がある。Mitzenmacher (2004), Gabaix (2016) はべき分布の研究を展望している。
2) 順位の対数を人口の対数に回帰させるのはつぎの理由による。人口はべき乗則に従い、逆累積分布関数を $kS^{-\zeta}$ とする。この分布から ($n-1$) の都市を抽出し、$S_{(1)} \geq .... \geq S_{(n-1)}$ と降順に並べる。$i/n = E[kS_{(i)}^{-\zeta}]$ から、ランクサイズルール

$$Rank \cong nkSize^{-\zeta}$$

が成り立つ。
3) 以下の議論は主に Gabaix (1999),(1999a),(2009) に基づく。
4) Kesten (1973) の定理 5 による。
5) Gabaix (1999) を参照した。

参考文献

[1] Axtell, R. (2001) "Zipf Distribution of U.S. Firm Sizes," *Science*, Vol.293, 1818-1820.

[2] Baker, G, Jensen M, Murphy K. (1988), "Compensation and Incentives: Practice vs. Theory", *Journal of Finance*, Vol.43, 593-616.

[3] Barro J, Barro RJ. (1990), "Pay, Performance, and Turnover of Bank CEOs", *Journal of Labor Economics*, Vol.8, 448-481.

[4] Champernowne, D. (1953) "A Model of Income Distribution", *Economic Journal*, Vol.63, 318-351.

[5] Cosh, A.(1975), "The Remuneration of Chief Executives in the United Kingdom", *Economic*

Journal, Vol.85, 75-94.

[6] Frydman C, Saks R. (2007), "Historical Trends in Executive Compensation, 1936-2003", Working Paper, Harvard Univ.

[7] Fujiwara, Y. (2004), "Zipf Law in Firms Bankruptcy", *Physica. A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol.337, 219-230.

[8] Gabaix, X. (1999) "Zipf's Law for Cities: An Explanation", *Quarterly Journal of Economics*, Vol.114, 739-767.

[9] ———, (2006) "Power Laws in Economics: An Introduction", *Journal of Economic Perspectives*, Vol.35, 185-206.

[10] ——— ,(2009) "Power Laws in Economics and Finance", *Annual Review of Economics*, Vol.1, 255-294.

[11] Jackson, M. (2009), "Networks and Economic Behavior", *Annual Review of Economics*, Vol.1, 489-513.

[12] Kesten, H. (1973) "Random Difference Equations and Renewal Theory for Products of Random Matrices", *Acta Mathematica*, Vol.131, 207-248.

[13] Krugman, P. (1996) "Confronting the Mystery of Urban Hierarchy", *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol.10, 399-418.

[14] Luttmer, EGJ. (2007), "Selection, Growth, and the Size Distribution of Firms", *Quarterly Journal of Economics*, Vol.122, 1103-1144.

[15] Mandelbrot, B. (1963) "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, Vol.36, 394-419.

[16] Mitzenmacher, M. (2004) "A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distribution", *Internet mathematics*, Vol.1, 226-251.

[17] Okuyama K, Takayasu M, Takayasu H. (1999), "Zipf.s Law in Income Distribution of Companies", *Physica. A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol.269, 125-131.

[18] Roberts, D. R. (1956), "A General Theory of Executive Compensation Based on Statistically Tested Propositions", *Quarterly Journal of Economics*, Vol.70, 270-294.

[19] Rosen, S. (1992) "Contracts and the Market for Executives", In *Contract Economics*, eds. L Werin, H Wijkander, Cambridge, MA: Oxford, Blackwell.

[20] Simon, H. (1955) "On a Class of Skew Distribution Functions", *Biometrika*. Vol.42, 425-440.

[21] Zips, G. K. (1949) *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Addison-Wesley.