動的計画法の数値解析

Numerical Analysis of Dynamic Programming

——計算経済学の研究（その３）——

釜　　国　男
Kunio KAMA

1.　はじめに

動的計画法（Dynamic Programming [DP]）は，動学的な経済分析の基本的なツールであり，その理論的な性質は詳しく研究されている[1]．なかでも Stokey and Lucas (1989) は DP の理論を数学的に厳密な形で展開して経済学における多くの応用例を示している．DP の問題は特殊な場合を除いて一般に closed form の解は存在しない．このために何らかの方法で近似的な解を求めざるを得ないが，大きく分けると前々回に説明したプクジェクション法と離散近似法がある．前者は多項式の線形結合によって関数を近似する方法で，直感的に理解しやすく計算時間も短いという長所がある．しかし微分可能な多項式を用いる関係で適用可能な問題は限られる．これに対して後者は関数の微分可能性を仮定しないので多くの問題へ適用可能であるが，実際には多大の計算量と記憶容量を必要とするために比較的簡単な問題しか扱えない．したがって問題に応じて適当に選択する必要がある．

以下では，はじめに DP の基本的な考え方と方法について簡単な説明を行い，いくつかの重要な性質を示す．つぎに最適成長モデルを例として数値的な解法を説明する．状態空間を離散近似する反復解法と目的関数をテイラー展開して線形レギュレータ理論を適用する方法について検討する．この方法は計算が比較的に簡単であり，リアルビジネスサイクルの研究でよく用いられている．

2.　動的計画法

2.1　基本モデル

つぎのような最適化問題を考える．

$$\max_{\{u_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t,\ u_t) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad x_{t+1}=g(x_t,\ u_t),\quad x_0 \text{ given}$$

$r(x_t,\ u_t)$ は有界な凹関数で，集合 $\{(x_{t+1},\ x_t):x_{t+1}\leqq g(x_t,\ u_t),\ u_t\in R^k\}$ は凸かつコンパクトとする．最適化された目的関数の値を V で表すと

$$V(x_0)=\max_{\{u_t\}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t r(x_t,\ u_t)\quad \text{s.t.}\quad x_{t+1}=g(x_t,\ u_t),\ x_0\ \text{given}$$

V は価値関数（Value Function）と呼ばれ，その定義からつぎのベルマン方程式を得る．

$$V(x)=\max_{u}\{r(x,\ u)+\beta V[g(x,\ u)]\} \tag{2}$$

これは $V(x)$ の関数方程式であり，右辺を最大化する u を $u=h(x)$ と表し政策関数（Policy Function）と呼ぶ．先に述べた条件が満たされると，次の性質が成り立つ．

(a) ベルマン方程式はユニークな解をもち $V(x)$ は単調増加の狭義凹関数である．

(b) $V(x)$ は任意の有界な連続関数 $V_0(x)$ を初期値として反復式

$$V_{j+1}(x)=\max_{\{u\}}\{r(x,\ u)+\beta V_j[g(x,\ u)]\} \tag{3}$$

から $j\to\infty$ として得られる．

(c) 政策関数は time invariant な単価関数である．

(d) 極限の関数 $V(x)$ は微分可能で

$$V'(x)=\frac{\partial r(x,\ h(x))}{\partial x}+\beta\frac{\partial g(x,\ h(x))}{\partial x}V'[g(x,\ h(x))] \tag{4}$$

が成り立つ（Benveniste and Scheinkman の定理）．(1) の制約式が x を含まないときは第 2 項はゼロであり

$$V'(x)=\frac{\partial r(x,\ h(x))}{\partial x} \tag{5}$$

となる．

これらの性質は理論的な研究ではもちろん，DP の問題を数値的に解くときにも基礎となるものである．とくに具体的に解法を示している (b) の性質は重要である．

2.2　最適成長モデル

つぎの簡単な最適成長モデルに DP を適用しよう．

$$\max_{\{c_t\}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\ln(c_t) \tag{6}$$

$$\text{s.t.}\quad c_t+k_{t+1}=Ak^{\alpha}$$

k_0 は所与であり，$A>0$, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ とする．この問題に反復解法を適用しよう．まず $V_0=0$ を仮定すると $j=0$ のときは

$$V_1=\max_{c}\ln(c)\quad \text{s.t.}\quad c+k'=Ak^{\alpha}$$

明らかに解は $c=Ak^{\alpha}$, $k'=0$ である．このとき

$$V_1=\ln A+\alpha\ln k$$

となる．つぎに $j=2$ では

$$V_2=\max_{c}(\ln(c)+\beta(\ln A+\alpha\ln k'))$$

$$\text{s.t.}\quad c+k'=Ak^{\alpha}$$

解を求めると，$c=Ak^\alpha/(1+\alpha\beta)$，$k'=\alpha\beta Ak^\alpha/(1+\alpha\beta)$ である．このとき

$$V_2=\ln\left[\left(1-\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\right)Ak^\alpha\right]+\beta\left[\ln A+\alpha\ln\left(\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}Ak^\alpha\right)\right]$$

この計算を繰り返し行うと

$$\begin{aligned}
&c=(1-\alpha\beta)Ak^\alpha\\
&k'=\alpha\beta Ak^\alpha\\
&V(k)=\frac{1}{1-\beta}\left[\ln A(1-\alpha\beta)+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln A\alpha\beta\right]+\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k
\end{aligned} \tag{7}$$

へ収束することがわかる．関数空間における $V(k)$ の不動点を反復法で求めるこの方法は，Value Function Iteration と呼ばれる．

推測法は，あらかじめ $V(k)$ の形を推測して未定係数法で未知の係数を決める方法である．解についての予備知識が必要であるので一般的な方法ではないが，上の問題には適用可能である．対数の効用関数を仮定しているので

$$V(k)=C_1+C_2\ln k \tag{8}$$

と推測する．C_1 と C_2 は未知の係数である．ベルマン方程式の右辺は

$$\max_c\,(\ln c+\beta(C_1+C_2\ln(Ak^\alpha-c)))$$

となり，最適な消費は

$$c=\frac{Ak^\alpha}{1+\beta C_2}$$

となる．したがってベルマン方程式は

$$C_1+C_2\ln k=\ln(A/(1+\beta C_2))+\beta C_1+\beta C_2\ln(\beta C_2A/(1+\beta C_2))+(\alpha+\alpha\beta C_2)\ln k$$

と表される．これは k に関する恒等式であるので

$$C_1=\frac{1}{1-\beta}\left[\ln A(1-\alpha\beta)+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln A\alpha\beta\right] \tag{9}$$

$$C_2=\frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \tag{10}$$

となる．

第3の解法は Policy Function Iteration である．これは政策関数を反復計算する方法で，Value Function より速く収束することが知られている．いまの問題では k_{t+1} を政策変数として，政策関数をかりに

$$k_{t+1}=h_0Ak_t^\alpha,\quad 0<h_0<1$$

とする．このとき価値関数は

$$\begin{aligned}
V_0(k_0)&=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\ln(Ak_t^\alpha-h_0Ak_t^\alpha)\\
&=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(\ln(1-h_0)+\ln A+\alpha\ln k_t)
\end{aligned}$$

となる．$\ln k_{t+1}=\ln(h_0A)+\alpha\ln k_t$ から

$$\ln k_t = \ln(h_0 A)\sum_{j=0}^{t-1}\alpha^j + \alpha^t \ln k_0$$

であるので，これを上の式に代入すると

$$V_0(k_0) = 定数 + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k_0$$

となる．つぎに

$$\ln(Ak_t^{\alpha} - k_{t+1}) + \beta\left(定数 + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k_{t+1}\right)$$

$$k_{t+1} = h_1 A k_t^{\alpha}$$

を最大化する h_1 を求める．$h_1=\alpha\beta$，つまり $k_{t+1}=\alpha\beta Ak_t^{\alpha}$ が最適な政策となる．これは Value Function Iteration で求めた解と同じであり，1回の反復で真の解へ収束することがわかる．

3． 離散近似法

前節では特殊な効用関数を仮定して解析的な解を導出したが，一般的な効用関数ではこうした解は存在しない．そこで近似解を得るために考案された方法のひとつが離散近似法である[2)]．この方法では，まず状態変数と政策変数を適当に選んで（2）のベルマン方程式を

$$V(x) = \max_{x'}\{r(x,\ x') + \beta V(x')\}$$

と書きかえる．x と x' は離散値の集合 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots x_n\}$ のみを取るものとする．$V_i = V(x_i)$ とすると，上の式は

$$V_i = \max\{r(x_i,\ x_1) + \beta V_1,\ \cdots,\ r(x_i,\ x_n) + \beta V_n\} \qquad i=1,\ \cdots,\ n \tag{11}$$

となる．これは $V_1,\ \cdots,\ V_n$ を未知数とする連立方程式であり，縮小写像の定理によりユニークな解が存在する．つまり（11）の右辺を単に写像 TV で表すと，$V^*=TV^*$ となる V^* が存在する．つぎの手順で解を求める．

（ステップ0）

初期値 $V^{(0)}$ と停止条件 $\varepsilon>0$ を決める．

（ステップ1）

$V^{(k+1)} = TV^{(k)}$ を計算する．

（ステップ2）

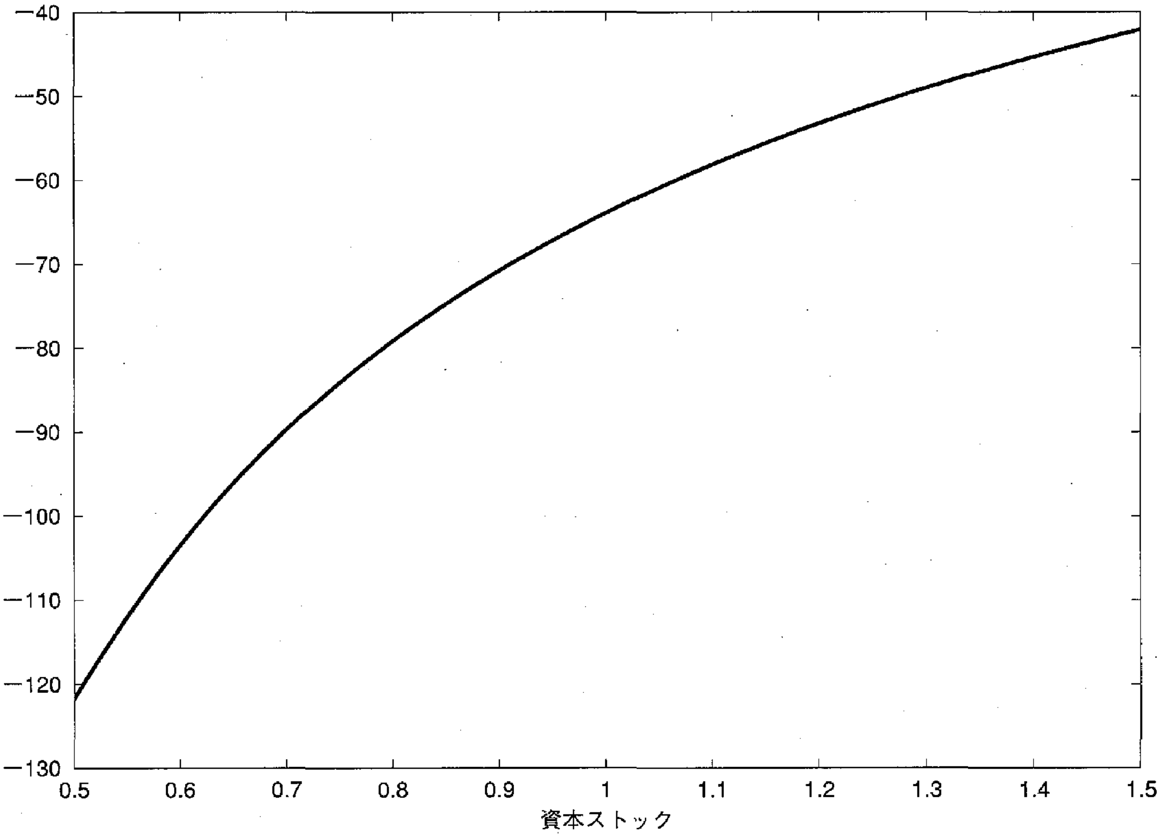
もし $\| V^{(k+1)} - TV^{(k)} \| < \varepsilon$ であれば次のステップに進み，そうでなければステップ1へ戻る．

（ステップ3）

$V^{(k+1)}$ に対応する x' の値を要素とするベクトルを x'^* とする．x と x'^* を組合わせると政策関数となる．

政策関数の値を要素とするベクトル P^* を計算して，$V^*=(I-\beta Q)^{-1}P^*$ を求める．Q は $n\times n$ 行列で i 行 j 列の要素は，（11）右辺の最大値が $r(x_i,\ x_j)+\beta V_j$ に等しければ1，そうでなければ0となる．I は $n\times n$ の単位行列である．

図 1　価値関数



こうして求めた解は誤差をともなうが，誤差の大きさに関して次の関係が成り立つ[3)]．

$$\| V^* - V^{(k)} \| \leqq (1-\beta)^{-1} \| V^{(k+1)} - V^{(k)} \|$$

したがって

$$\| V^{(k+1)} - V^{(k)} \| \leqq \varepsilon (1-\beta)$$

を停止条件とすると

$$\| V^* - V^{(k)} \| \leqq \varepsilon$$

が保証される．このアルゴリズムは収束が遅いのが難点である．そのため Policy Function Iteration をはじめいろいろなアルゴリズムが考案されているが，その説明は省略する．

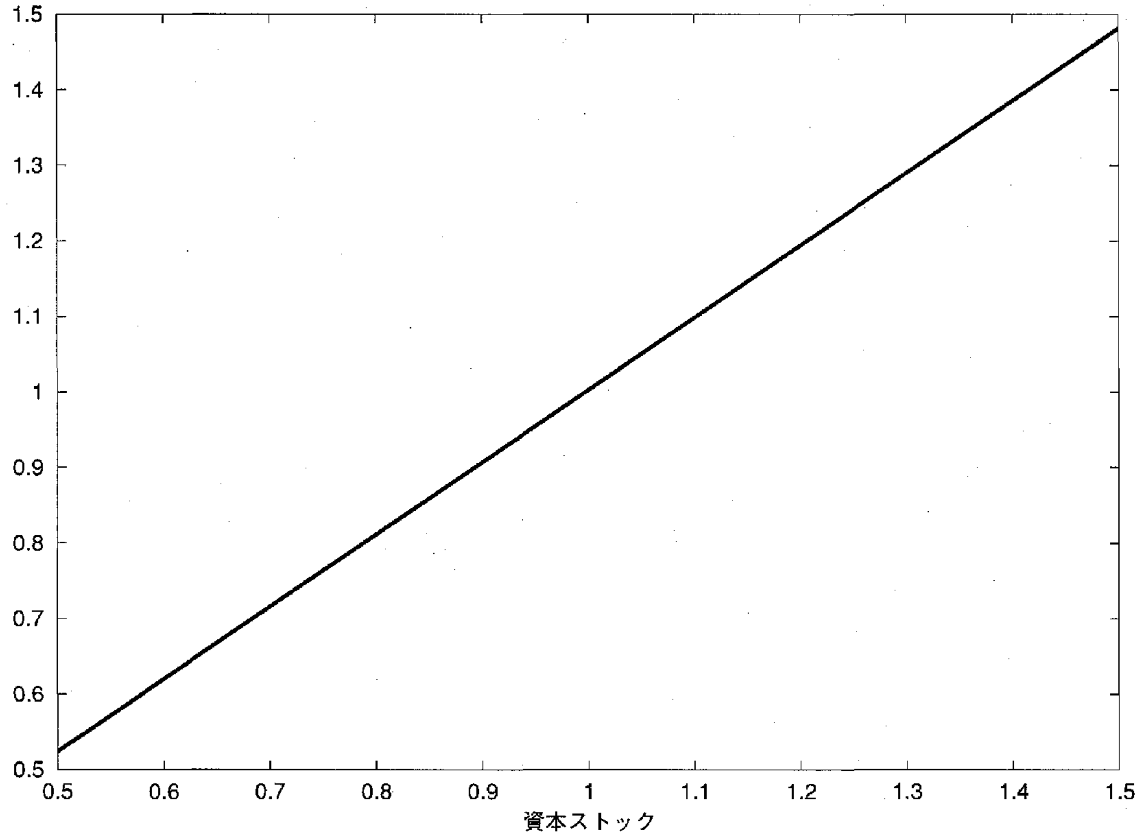
上のアルゴリズムをつぎの最適成長モデルに適用しよう．

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{12}$$

$$\text{s.t.} \quad k_{t+1} = k_t + A k_t^{\alpha} - c_t$$

パラメータは $\gamma=-5$，$\alpha=0.25$，$\beta=0.96$ とする．また定常状態での資本ストックが 1 となるように，$A=(1-\beta)/\alpha\beta$ とする．資本ストックは区間 [0.5, 1,5] 内の1000個の点で離散近似する．ゼロ関数を初期値として iteration を繰り返すと収束して近似解が得られる．図 1 は価値関数を示している．関数は理論的に予想されるとおり単調増加の凹関数である．また図 2 は対応する政策関数を表す．これはほとんど直線となり，両方の端点を結んだ傾きは 0.96 である．したがっ

図 2　政策関数



て投資の絶対額は低く，定常状態への移行は長い時間を要することがわかる．Matlab のプログラムを PC（1.4GHz）で実行すると，約40秒の時間がかかる．プロジェクション法や摂動法の１秒前後と比べると，かなり効率が悪いといえよう．さらに状態変数の数が増えると計算量と必要メモリーが爆発的に増大して現状では実行不可能となる．こうした困難に対処するために，(1) を最適レギュレータで近似する方法が広く用いられている[4)]．次節でこの方法について検討しよう．

4．線形レギュレータ

はじめに，つぎの確率的な最適レギュレータ問題について考えよう．

$$\max_{\{u_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (x_t' R x_t + u_t' Q u_t + 2x_t' W u_t) \tag{13}$$

$$\text{s.t.}\quad x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + C\varepsilon_{t+1},\quad x_0 \text{ given}$$

$$\varepsilon_{t+1} \sim \text{NID}(0,\ \Sigma)$$

ここで x_t は $(n\times1)$ の状態ベクトル，u_t は $(m\times1)$ の制御ベクトル，ε_{t+1} は $(n\times1)$ の確率変数のベクトル，R は $(n\times n)$ の負値半定符号行列（negative semidefinite matrix），Q は $(m\times m)$ の負値定符号行列（negative definite matrix），W は $(n\times m)$ の行列である．さらに A は $(n\times n)$ 行列，B は $(n\times m)$ 行列，C は $(n\times n)$ 行列である．この問題には closed form の解が

存在し，最適な政策関数は

$$u_t = -Fx_t \tag{14}$$

$$F = (Q+\beta B'PB)^{-1}(\beta B'PA+W')$$

で与えられる[5]．P は負値半定符号行列で，リッカチ方程式

$$P = R+\beta A'PA-(\beta A'PB+W)(Q+\beta B'PB)^{-1}(\beta B'PA+W') \tag{15}$$

を満たす．P は逐次計算により求めることができる．つまり $P_0=0$ を初期値として

$$P_{j+1} = R+\beta A'P_jA-(\beta A'P_jB+W)(Q+\beta B'P_jB)^{-1}(\beta B'P_jA+W')$$

の計算を P に収束するまで繰り返す[6]．

(15) から P と F は β, R, Q, A, B, W の陰伏的な関数となるが，ε_{t+1} の分散 Σ には依存しない．この性質は certainty equivalence と呼ばれる．いうまでもなく価値関数の値は不確実性の度合いによって変化し

$$V(x) = x'Px+\beta(1-\beta)tr(C'PC\Sigma) \tag{16}$$

となる．

最適な政策関数 (14) が得られると，これを状態方程式に代入して

$$x_{t+1} = (A-BF)x_t+\varepsilon_{t+1} \tag{17}$$

となる．x_0 と $\varepsilon_{t+1}(t \geqq 0)$ の実現値が与えられると，この式と (14) から x_t と u_t の系列を計算することができる．

線型レギュレータは陽表的な解が得られる DP の例としてそれ自体興味があるが，通常は他の制御問題の近似解を得る目的で使用される．すなわち closed form の解が存在しない場合，元の問題を (13) で近似して解を求める方法である．この方法について説明したあと，確率的な最適成長モデルへ適用しよう[7]．

つぎの一般的な制御問題

$$\max_{\{u_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t,\ u_t) \tag{18}$$

$$\text{s.t.}\quad x_{t+1} = g(x_t,\ u_t,\ \varepsilon_{t+1}),\ \ x_0 \text{ given}$$

を最適レギュレータで近似する．まずシステムの定常状態を知るために，$\varepsilon_{t+1}=0$ とすると (18) は

$$\max_{\{u_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t,\ u_t) \tag{19}$$

$$\text{s.t.}\quad x_{t+1} = g(x_t,\ u_t,\ 0),\ \ x_0 \text{ given}$$

となる．この制約条件付き最大化問題を解くためにラグランジュ関数

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t,\ u_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \lambda'_{t+1}(x_{t+1}-g(x_t,\ u_t,\ 0))$$

を定義する．ここで λ_{t+1} は $(n\times 1)$ のラグランジュ乗数のベクトルである．この問題の一階条件は

$$\beta\frac{\partial r(x_{t+1},\ u_{t+1})}{\partial x_{t+1}}+\lambda_{t+1}-\beta\frac{\partial g(x_{t+1},\ u_{t+1},\ 0)'}{\partial x_{t+1}}\lambda_{t+2}=0$$

$$\frac{\partial r(x_t,\ u_t)}{\partial u_t}-\frac{\partial g(x_t,\ u_t,\ 0)'}{\partial u_t}\lambda_{t+1}=0,\quad t\geqq 0$$

となる．定常状態の値を x^*, u^*, λ^* とすると

$$\beta\frac{\partial r(x^*,\ u^*)}{\partial x}+\lambda^*-\beta\frac{\partial g(x^*,\ u^*,\ 0)'}{\partial x}\lambda^*=0$$

$$\frac{\partial r(x^*,\ u^*)}{\partial u}-\frac{\partial g(x^*,\ u^*,\ 0)'}{\partial u}\lambda^*=0$$

$$x^*-g(x^*,\ u^*,\ 0)=0$$

を満足する．方程式と未知数はともに $(2m+n)$ あり，これを解くと定常状態の値がわかる．そして状態方程式と効用関数を定常値の回りでテイラー展開すれば最適レギュレータ問題として定式化される．

5．確率的成長モデル

つぎのような確率的成長モデルを考える．

$$\max E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\frac{(k_t+e^{\eta_t}k_t^{\alpha}-k_{t+1})^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{20}$$

$$\text{s.t.}\quad \eta_{t+1}=\rho\eta_t+\varepsilon_{t+1},\ \ k_0,\ \ \eta_0\ \text{given}$$

$$\varepsilon_{t+1}\sim N(0,\ \sigma^2)$$

ここで $\eta_t=\log(\theta_t)$，θ_t は技術ショックを表す．消費は含まれてないが，資本ストックの政策関数がわかると，$c_t=k_t+e^{\eta_t}k_t^{\alpha}-k_{t+1}$ の関係から消費関数を求めることができる．

このモデルを（13）で近似するために，$\varepsilon_t=0$ として定常状態を求めると

$$\eta^*=0,\quad k^*=\left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{21}$$

となる．前節の記号で $u_t=k_{t+1}-k_t$，$x_t=[k_t\ 1\ \eta_t]'$ とすると，x_t の状態方程式ははじめから線形であり，その係数は

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\rho\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{22}$$

である．効用関数を $(\eta,\ k)=(\eta^*,\ k^*)$ の回りでテイラー展開すると

$$R=\frac{(k^*)^{\alpha(1-\gamma)}}{2}\times\begin{bmatrix}\dfrac{-\gamma\alpha^2+\alpha^2-\alpha}{(k^*)^2}&\dfrac{\gamma\alpha^2-\alpha^2+2\alpha}{k^*}&\dfrac{\alpha(1-\gamma)}{k^*}\\[2ex]\dfrac{\gamma\alpha^2-\alpha^2+2\alpha}{k^*}&\dfrac{2}{1-\gamma}-3\alpha+\alpha^2(1-\gamma)&1+\alpha\gamma-\alpha\\[2ex]\dfrac{\alpha(1-\gamma)}{k^*}&1+\alpha\gamma-\alpha&1-\gamma\end{bmatrix}$$

$$Q=\frac{-\gamma(k^*)^{-\alpha\gamma-\alpha}}{2},\quad W=\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha\gamma(k^*)^{-\alpha\gamma-1}}{2}\\ -\dfrac{(1+\alpha\gamma)(k^*)^{-\alpha\gamma}}{2}\\ \gamma(k^*)^{-\alpha\gamma}\end{bmatrix} \tag{23}$$

となる．

計算にあたって，$\alpha=0.25$，$\beta=0.96$，$\gamma=2$，$\rho=0.90$，$\sigma=0.05$とする．このとき$k^*=10.9027$で

$$R=\begin{bmatrix}-0.0007 & 0.0142 & -0.0063\\ 0.0142 & -0.7739 & 0.3440\\ -0.0063 & 0.3440 & -0.2752\end{bmatrix},\quad Q=-0.1667,\quad W=\begin{bmatrix}0.0069\\ -0.2271\\ 0.3029\end{bmatrix} \tag{24}$$

となる．前節のアルゴリズムにしたがって計算を行うと

$$P=\begin{bmatrix}-0.0133 & 0.3030 & -0.0985\\ 0.3030 & -18.7812 & 3.0976\\ -0.0985 & 3.0976 & -0.0496\end{bmatrix} \tag{25}$$

$$k_{t+1}-k_t=0.3552-0.03258k_t+1.2132\eta_t$$

が得られる．(25) 式を書きかえると

$$k_{t+1}-k_t=0.0326(k^*-k_t)+1.2132\eta_t$$

となり，投資には部分調整メカニズムが働くことがわかる．しかし調整係数は0.0326と極端に小さい．またプラスの技術ショックは投資の拡大をもたらし，マイナスのショックは投資を減少させる．価値関数は資本と技術ショックの単調増加の凹関数で，技術が進歩するほど生涯効用は高くなる．図3は，技術ショックを発生させて資本ストックと消費の実現値を計算した結果を示している．消費の水準は資本ストックの水準よりかなり低く，消費の変動は資本よりも小さい．つまり消費を安定化させるメカニズムが働いているわけである．消費の定義から予想されるとおり，ふたつの変数の相関は強く相関係数は0.97となる．つぎの図4は確率的なシミュレーションを2000回繰り返し，消費の確率分布を求めたものである．平均値を中心にほぼ左右対称であるが，これは長期的に技術ショックが正規分布をするからである．

この簡単な問題では解析的な解を求めることが可能で

$$k_t-k_{t-1}=(\phi-1)k_{t-1}-\frac{\phi\mu_0}{1-\beta\phi}-\frac{\phi\mu_1\rho}{1-\beta\rho\phi}\eta_t \tag{26}$$

となる[8)]．ここで

$$\mu_0=\frac{\beta^2\alpha(\alpha-1)(k^*)^{2\alpha-1}}{\gamma}$$

$$\mu_1=\beta\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(k^*)^{\alpha}-\frac{\beta^2\alpha(k^*)^{2\alpha-1}}{\gamma}$$

ϕは

図 3 消費と資本の実現値

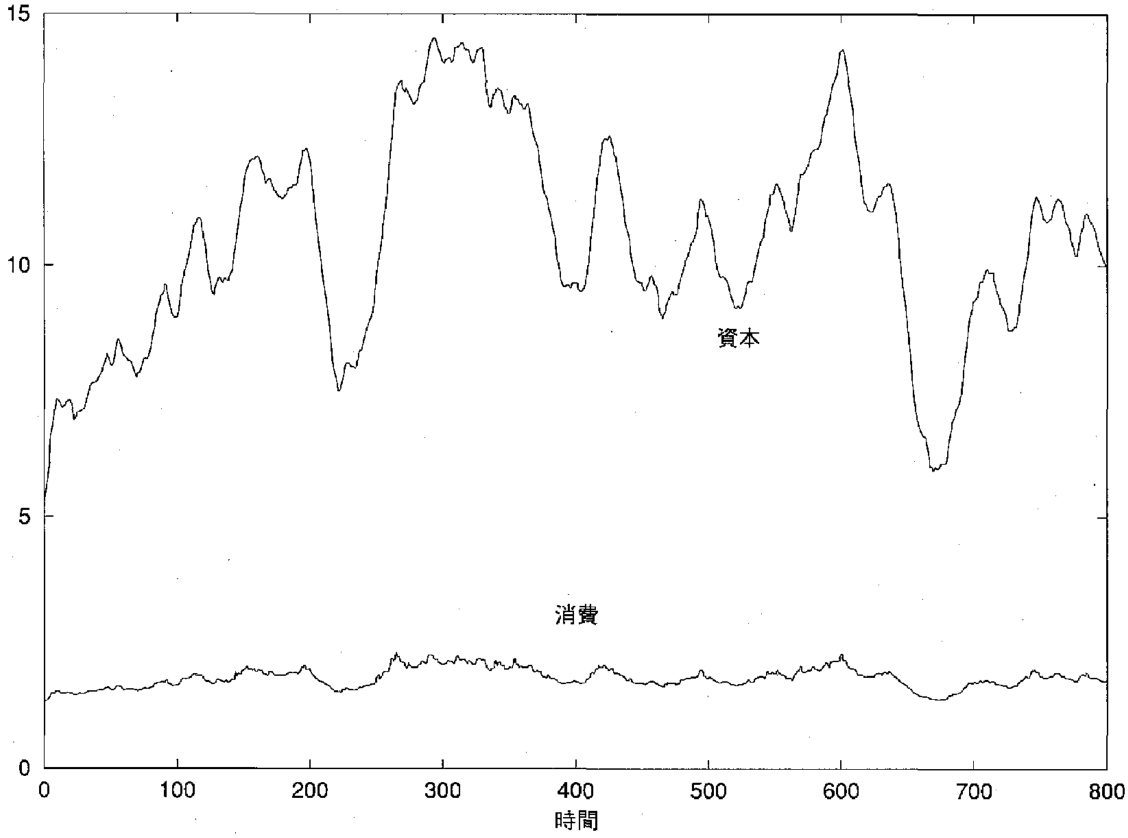
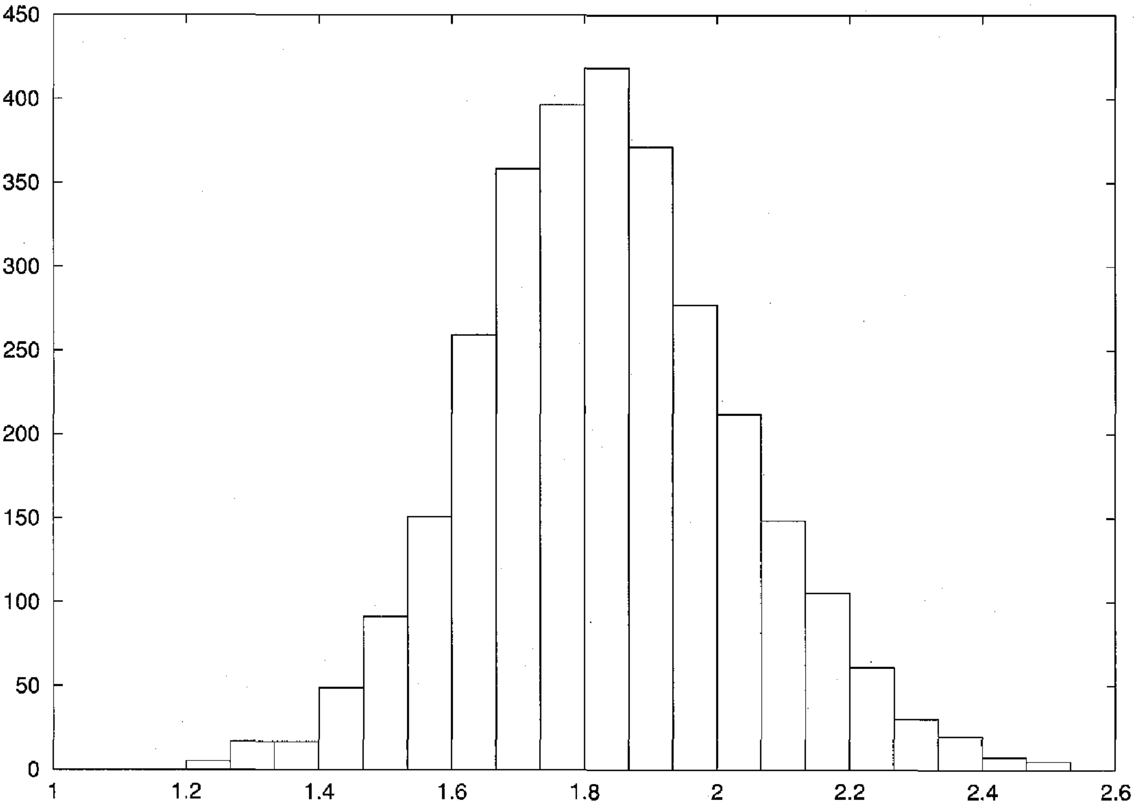


図 4 消費の度数分布



$$z^2-\left[1+\frac{1}{\beta}+\frac{(1-\alpha)(1-\beta)^2}{\beta\alpha\gamma}\right]z+\frac{1}{\beta}=0$$

の絶対値が1より小さい根である．確認のためにパラメータを代入して計算すると，(25) とまったく同じ係数が得られる．ただし，この方法で直接に解を求めることができるのは簡単な問題に限られ，変数が多くなると数値解析によるしかないであろう．

このように線型2次近似法で確率的成長モデルの近似解を得ることが可能であるが，どのモデルにも適用できるわけではない．適用するためには，(1) 状態変数の推移方程式が線形であること，(2) 政策変数に対して制約条件が無いか，あっても有効ではない，(3) 確率的ショックの変動が小さい，などの条件が必要である．確率的成長モデルの例では ε_t の分散が大きいと資本ストックがマイナスになってしまう．経済問題では多くの場合，政策変数は非負の値しか取れないので (2) の制約が効いてくる．線型2次近似を適用するにあたっては，これらの仮定がグローバルに満たされるかどうかあらかじめ慎重に検討する必要がある．

6.　むすび

動学的な経済分析の重要なツールであるDPの数値解法のうち，ベルマン方程式を離散近似して反復計算する方法と，最適レギュレータの問題として解く方法について検討した．ふたつの方法はそれぞれ一長一短があり，取り扱う問題に応じて適宜選択する必要がある．計算時間の点では後の方法が明らかに優れている．また不確実性を含むモデルのように状態変数が複数個ある場合には離散近似法は現在のところ実行不可能である．一方，線型2次近似法は基本的に単純な行列演算にすぎないので次元の制約は受けない．このためリアルビジネスサイクルの研究ではこの方法がよく使われている．しかし certainty equivalence の成り立たないようなモデルに対しては適用できない．結局，ふたつのアプローチとも一定の限界があることは明らかであり，現在では主に摂動法その他の新しい方法が使われている．またファイナンスの分野ではDPとプロジェクション法を組合わせた方法が広く用いられている．これは経済の問題にも適用可能で今後の研究課題としたい．

注

1) 主要な文献は，Bellman (1957), Bertsekas (1976), Bertsekas and Shreve (1978), Stokey and Lucas (with Prescott) (1989) などである．

2) 以下の記述は主として Ljungqivist and Sargent (2000) Ch. 2 と Judd (1998) Ch. 12 に依拠している．

3) ベクトル $x=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ の最大ノルムは

$$\|x\|=\max_{1\leq j\leq n}|x_j|$$

と定義される．

4) 代表的な例として，Kydland and Prescott (1982) がある．

5) Kwakernaak and Sivan (1972) を参照．

6) リッカチ方程式の数値解法については，片山 (1983) にいくつかのアルゴリズムが紹介されている．

7) 以下の記述は McGrattan (1990) に基づいている．

8) McGrattan (1990) を参照．

参考文献

Bellman, R. R. (1957), *Dynamic Programming*, Princeton: Princeton University Press.

Bertsekas, D. P. (1976), *Dynamic Programming and Stochastic Control*, New York: Academic Press.

Bertsekas, D. P. and Shreve, S. E. (1978), *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*, New York: Academic Press.

Judd, K. L. (1998), *Numerical Methods in Economics*, MA: MIT Press.

片山徹 (1983)『応用カルマンフィルタ』朝倉書店.

Kwakernaak, H. and Sivan, R. (1972), *Linear Optimal Control Systems*, New York: Wiley.

Kydland, F. E. and Prescott, E. C. (1982) "Time to build and aggregate fluctuations", *Econometrica* 50: 1345-70.

Ljungqivist, L. and Sargent, T. J. (2000) *Recursive Macroeconomic Theory*, MA: MIT Press.

McGrattan, E. R. (1990), "Solving the stochastic growth model by Linear-quadratic approximation", *Journal of Business and Economic Statistics* 8: 41-44.

Stokey, N. and R. E. Lucas. (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge: Harvard University Press.