

ハリソン・スティーブンスモデルの検証

Some Flaws on the Harrison-Stevens Model

小林 孝次

Koji KOBAYASHI

土谷 幸久

Yukihisa TSUCHIYA

- §1 はじめに
- §2 ハリソン・スティーブンスモデルの概要
- §3 カルマンフィルターモデル
- §4 ハリソン・スティーブンスモデル：Single-State Model
- §5 ハリソン・スティーブンスモデルにおける4つの状態：Multi-State Model
- §6 検証：貨幣乗数の予測とあるバス会社の売上収入の予測
- §7 おわりに

§1 はじめに

予期せぬ構造変動が生じるとき、モデルの変更を余儀なくさせる場合がある。ベイジアン立場は、主観的判断を統計的に用い、そのような場面に対処するというものである。De Finetti が、いかなる客観世界にも主観は入り込むと述べているように¹⁾、客観データを主観的に読み直すということは多々あることである。主観的判断を統計的に用いるとは、情報に基づいて事前確率を事後確率に変換し用いるということである。

さて、本稿で検証することは、上記のようなベイジアンの時系列分析が現実の場面で機能するか否かという点である。具体的には、ハリソンとスティーブンス [6] 1971, [7] 1976のモデルを取り上げる。理由は、彼らのモデルがベイジアン時系列分析の初期の考察であり、その後多くの影響を与えたからである。例えば、チリのアジェンデ政権下で行なわれた国家サイバネティックスの実験 CyberSyn プロジェクトは、ハリソンとスティーブンスの1971年の論文に基づく最初の実験だったといえよう²⁾。また、Bomhoff [2] 1983, [3] 1994は、ハリソンとスティーブンスの4状態モデルを6状態モデルに拡張して分析を行っている。また、彼らの論文は、Makridakis, Wheelwright and McGee [9] 1978や Bernardo and Smith [1] 1994をはじめ、ベイジアン時系列分析では必ず引用されているからである³⁾。

1) De Finetti [4] 1990, p. 26を参照せよ。

2) もっともクーデターによって1973年には頓挫してしまい、効果の程は定かではない。

3) また海外では、ベイジアンが多いのも事実である。

本稿の論点は、以下の通りである。まず、ベイジアン⁴⁾の立場に従うならば、ハリソン・スティーブンスモデルにおいて每期一定とされている推移確率と基本分散比は改定しなければならないという点である。次に、それが可能であるならば改定を行うべきだが、改定の根拠なく改定を行うならば、ベイジアン⁴⁾の考えは「相当に主観的」にならざるを得ないのではないかという点である。現実的に、每期改定を行うことは、その根拠という点で不可能である。事実、ハリソンとスティーブンスは短期の予測に限定しているため、每期改定することは避けている。そこで本稿では彼らの提示する一定の推移確率と基本分散比に従って分析した場合と、それらを見捨てたケースであるカルマンフィルターのみで分析した場合を比較する。

結果は、カルマンフィルターのみによる予測の方が予測誤差は小さかった。特に、長期の分析の場合、この傾向が強まると考えられる。したがって彼らが経験に基づいて与えたという推移確率と基本分散比を用いるよりも、一様の推移確率と基本分散比を用いる、すなわちカルマンフィルターのみで予測を行う方が優れているといえる。

以下、まず、§2において、彼らのモデルの概要を示す。彼らのモデルはカルマンフィルターとベイジンの手法、そしてレジーム変化を伴うモデルで構成されている⁴⁾。そこで、§3ではカルマンフィルターについて整理し、次に§4でレジーム変化を伴わない、すなわち1つの状態のみで彼らの基本モデルを整理する。なお、これがカルマンフィルターのみで行う予測に対応する。さらにそれを踏まえて§5において、4つの状態への変化を考慮し、完結した彼らのモデルを解説する。そのなかで彼らのモデルが抱えている問題点を明らかにする。そして実例として§6でこのモデルを用いた貨幣乗数の予測およびあるバス会社の売上収入の予測を行い、その検証結果をもとに§7でこのモデルの問題点についてまとめることにする。

§2 ハリソン・スティーブンスモデルの概要

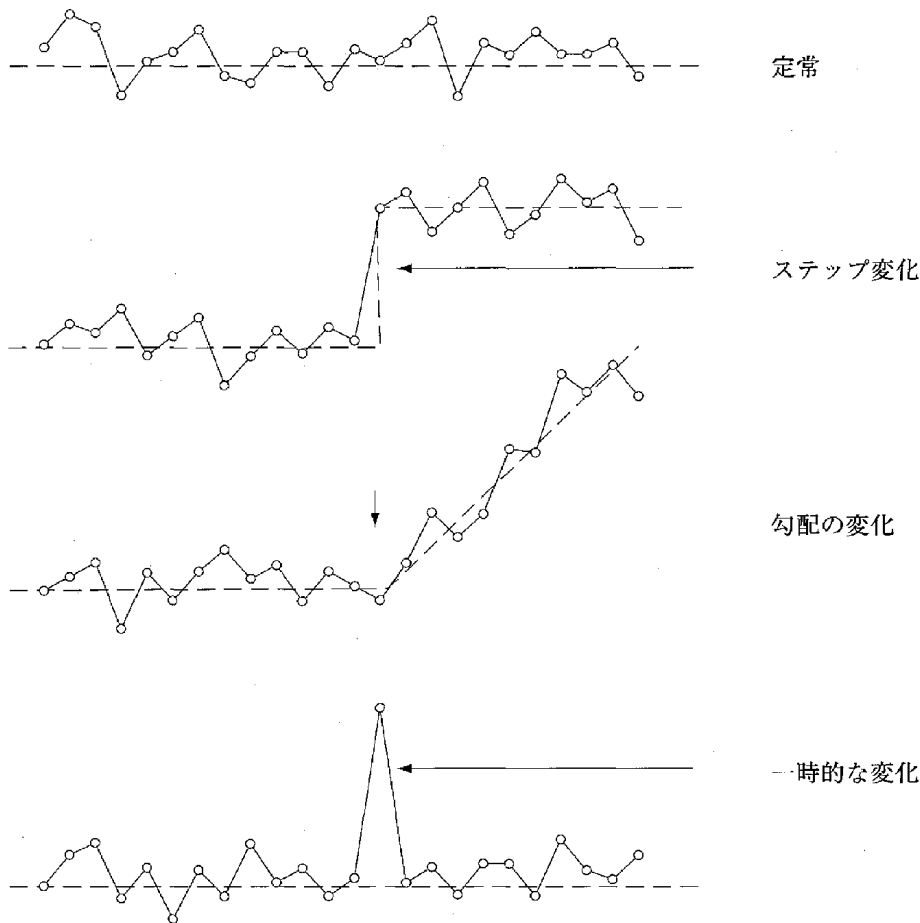
ハリソン・スティーブンスは、多くのモデルがトレンドの変化や一時的な変化によってその予測効率が著しく低下していることに着目し、経済時系列データの変化に対して4つの状態を想定して、各状態の推定を行い、それらを合成させて予測値を得ようと試みている。その各状態とは、定常、ステップの変化、勾配の変化そして一時的な変化の4つの状態である（図2-1を参照）。そして各状態の推定にベイジアンアプローチを用いて予測効率を改善しようとしている。

まず、彼らは状態 i ($i=1, 2, 3, 4$) が生じると予想される t 期の事前確率 $q_i^{(t)}$ ($t-1$ 期の事後確率) を与え、各状態の推定値にそれらを掛け合わせることによって、 t 期の予測値を得るという方法を考えている。

次に、 $t+1$ 期の各状態の推定値と事前確率 (t 期の事後確率) を得るために、 t 期のそれぞれの状態をさらに4状態へと展開させ、合計16通りのプロセスを想定する。そしてそれらを推定し、さらにそれらを縮約することによって $t+1$ 期の4状態の推定値と事前確率 (t 期の事後確率)

4) この意味において、最近 Hamilton [5] 1994 によって研究が行われているレジーム変化を伴う時系列モデルの原型となるようなナイーブなモデルである。

図 2-1 ハリソン・スティーブンスモデルにおける 4つの状態



を求める。すなわち、 t 期において状態が i であり、かつ $t+1$ 期に状態が j になる16通りのプロセスにおけるパラメータとその確率 $p^{(i,j)}$ を求め、それらを用いて $t+1$ 期の縮約された各状態の推定値と事前確率を求めている。なお、前期のある状態から今期の状態 j に移る推移確率 π_j は所与としている⁵⁾。

さらにまた、 $t+1$ 期の各状態の推定値と事前確率を掛け合わせるにより $t+1$ 期の予測値を求めていくという方法をとっている。ここでは縮約した4状態を用いて予測値を求めているが、当然のことであるが、16のプロセスにそれぞれが生じうる確率を掛け合わせるによっても同じ予測値が得られる。

これらをまとめると図2-2のようになる。

さて、ここで、ハリソン・スティーブンスの基本モデルを示すと次のようになる。これは§3で述べるカルマンフィルターモデルになっている。時点 t における観測値を d_t 、トレンドを μ_t 、勾配を β_t 、季節変動を s_t とすると

5) Harrison-Stevens [6] 1971では、状態 j の生じる確率を π_j で表わしているが、Harrison-Stevens [7] 1976では $t-1$ 期の状態 i を与えた場合に t 期にある状態 j になる推移確率を $\pi^{(i,j)}$ で表わしている。しかし、簡単化のために本稿では π_j の表記を用いる。

図 2-2 $t-1$ 期, t 期, $t+1$ 期における事前・事後の関係

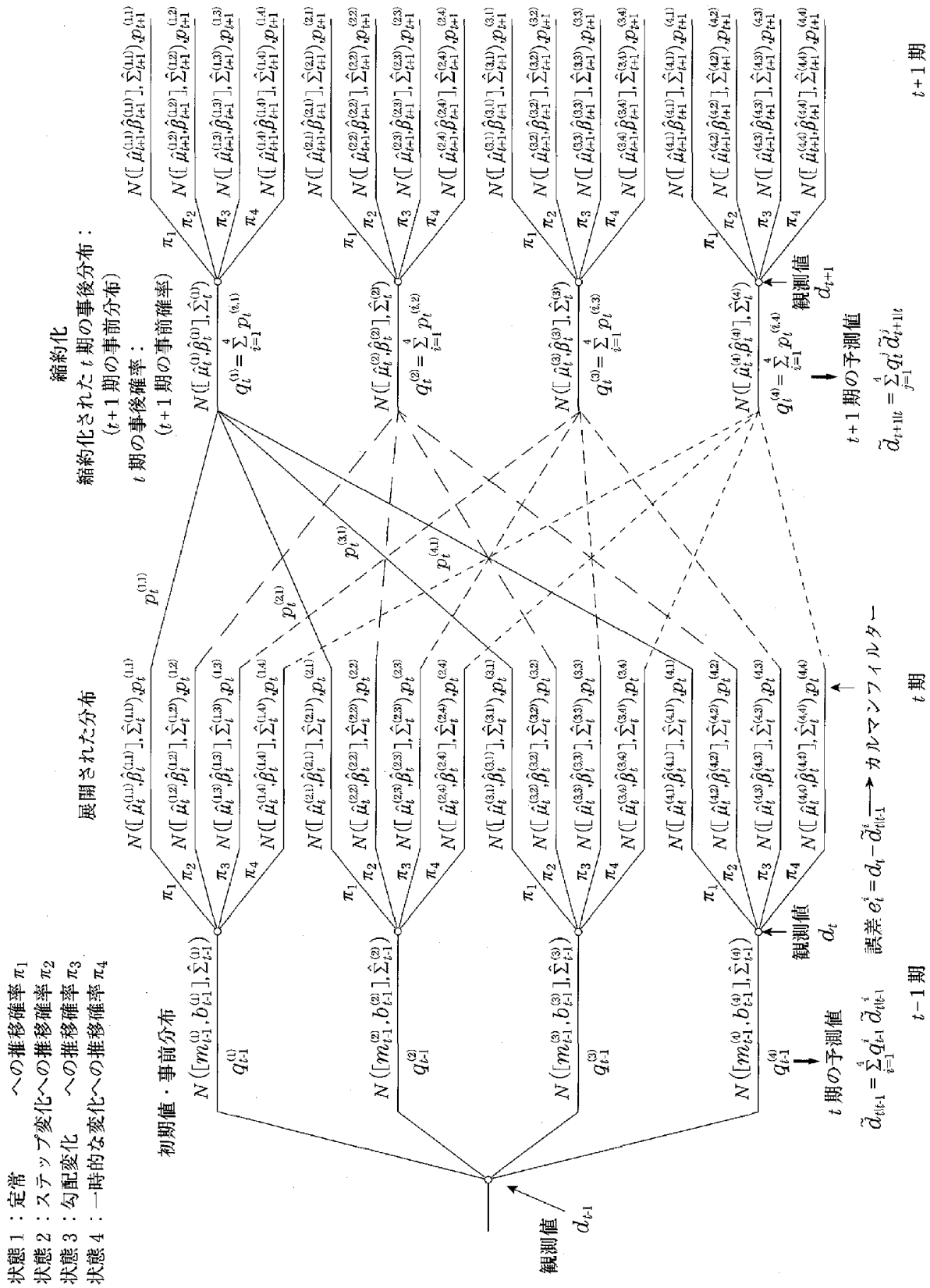


表 2-1 各状態における分散の大きさ

| 状態 | V_ε | V_γ | V_δ |
|--------|-----------------|------------|------------|
| 定常 | 普通 | 小 | 小 |
| ステップ変化 | 普通 | 大 | 小 |
| 勾配の変化 | 普通 | 小 | 大 |
| 一時的な変化 | 大 | 小 | 小 |

$$\begin{aligned}
 d_t &= \mu_t s_t + \varepsilon_t & (\varepsilon &\sim N(0, V_\varepsilon)) \\
 \mu_t &= \mu_{t-1} + \beta_t + \gamma_t & (\gamma &\sim N(0, V_\gamma)) \\
 \beta_t &= \beta_{t-1} + \delta_t & (\delta &\sim N(0, V_\delta))
 \end{aligned}
 \tag{2-1}$$

と表わされる。

(2-1)で、実際に観測されるのは d_t だけである。 μ_t と β_t は直接知ることはできない。しかし μ_t と β_t の直近の変動に関して、なんらかの見通しが得られることから、観測値 $d_t, d_{t-1} \dots$ から得られる情報と μ_t と β_t の趨勢に関する情報を確率分布で表現し、それらを予測に反映させる、という方法をハリソン・ステイブンスは採用している。

いま $\varepsilon_t, \gamma_t, \delta_t$ は互いに独立であり、それぞれ期待値 0、分散 $V_\varepsilon, V_\gamma, V_\delta$ を持つ正規攪乱項である。(2-1)において、 ε_t は観測値のみに影響を与える攪乱項であり、 γ_t, δ_t はそれぞれステップの変化と勾配の変化に影響を与える攪乱項である。4 状態におけるそれぞれの攪乱項については、表 2-1 のような前提をおいている。

ここで、ハリソン・ステイブンスでは、各状態の推定に際して、はじめに事前確率の初期値と推移確率、そして時系列データの変動に影響を与える上記の分散に対してある一定の値を与えている。事前確率の初期値についてはここでは各状態に対して均一に与えることにする。これとは別に、ハリソン・ステイブンスモデルでは t 期に状態 j へと推移する確率として推移確率 π_j を考えている。これは各期の状態をさらに各々 4 状態へ分岐させる際に用いられる確率であり、 $t-1$ 期に状態 i であり、かつ t 期に状態 j になる結合確率である 16 の状態に対する部分確率 $p^{(i,j)}$ の導出に決定的な役割を持っている。またこれら 16 の部分確率 $p^{(i,j)}$ から次期の事前確率が導出されるように組み立てられている。

さらに、時系列データの変動に影響を与える状態 j の上記の分散については、基本分散 V_0 にウェイト $R_\varepsilon, R_\gamma, R_\delta$ を掛ける形で与えている。すなわち

$$\begin{aligned}
 V_\varepsilon^{(j)} &= R_\varepsilon^{(j)} V_0 \\
 V_\gamma^{(j)} &= R_\gamma^{(j)} V_0 \\
 V_\delta^{(j)} &= R_\delta^{(j)} V_0
 \end{aligned}
 \tag{1-2}$$

と与えるので、ハリソン・ステイブンスはウェイト $R_\varepsilon, R_\gamma, R_\delta$ を基本分散比と呼んでいる。

なお、ハリソン・ステイブンスでは、推移確率と基本分散比の値は現実に観測された多くの時系列データに基づいて、次のような性質を満足するように決めている。

- (1) 定常（通常の変動）への推移には大きな確率を与える。

表 2-2 推移確率と基本分散比

| 状態 (j) | 推移確率 | 基本分散比 | | |
|------------|---------|-------------|-------------|-------------|
| | π_j | $R_s^{(j)}$ | $R_f^{(j)}$ | $R_g^{(j)}$ |
| 定常 (1) | 0.900 | 1 | 0 | 0 |
| ステップ変化 (2) | 0.003 | 1 | 100 | 0 |
| 勾配の変化 (3) | 0.003 | 1 | 0 | 1 |
| 一時的な変化 (4) | 0.094 | 101 | 0 | 0 |

- (2) 一時的な変化への推移確率には、ステップ変化あるいは勾配の変化への推移確率より、少なくとも10倍以上の大きさの確率を与える。
- (3) ステップ変化への推移確率は小さく、基本分散比 $R_f^{(2)}$ は大きいと仮定する。
- (4) 勾配の変化への推移確率と基本分散比には、(a) ステップ変化での $R_f^{(2)}$ より勾配の変化での $R_g^{(3)}$ は小さく $R_g^{(3)} < R_f^{(2)}$ でステップ変化への推移確率と同確率、あるいは (b) $R_g^{(3)} = R_f^{(2)}$ でステップ変化より小さい確率を与える。
- (5) 一時的な変化の基本分散比 $R_s^{(4)}$ は、他の状態の基本分散比の和より小さいということはない。

以上の点を考慮して、ハリソン・スティーブンスでは表2-2のような数値を提示している。

ここで問題となる点は、主観に基づいて定数を与えるこれらの値、特に、推移確率と基本分散比の値が、§5で詳細に示すように、状態の推定に影響を及ぼすことである。第1に、彼らは経験に基づいてこれらの値を決めているが、さまざまなケースに対してこれらにどのような値を与えるべきかが問題となる。第2にハリソン・スティーブンスモデルでは、これらを每期一定として定数を与えている点である。この第2の点については、短期的にはともかく長期的には予測に対して大きな問題を生じさせるものと思われる。

§3 カルマンフィルターモデル

(2-1) のモデルはカルマンフィルターモデルとなっているので、はじめに、カルマンフィルターについて整理しておくことにする。まず、

$$\left. \begin{aligned} y_t &= V_t \theta_t + \varepsilon_t && \text{測定方程式} \\ \theta_t &= L \theta_{t-1} + M \Gamma_t && \text{遷移方程式} \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

とおく。ここで、 y_t , V_t は観測データ、 θ_t は状態変数、 L , M は固定パラメーター、 ε_t , Γ_t は攪乱項である。さらに、

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0, E(\varepsilon_t^2) = W && \forall t \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_s) &= 0 && \forall t \neq s \\ E(\Gamma_t) &= 0, E(\Gamma_t \Gamma_t) = U && \forall t \\ E(\Gamma_t \Gamma_s) &= 0 && \forall t \neq s \end{aligned}$$

とする。

なお、(2-1)と(3-1)のカルマンフィルター表現との対応は、(2-1)の第1式が測定方程式であり、第2式と第3式が遷移方程式であり、

$$y_t = d_t, \quad V_t = [s_t, 0], \quad \theta_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_{t-1} = \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_t = \begin{bmatrix} \gamma_t \\ \delta_t \end{bmatrix}$$

となっている。

①状況設定

a. 固定パラメータ L, M, W, U は既知

b. $t-1$ 期においては、 $(y_1, V_1), (y_2, V_2) \dots (y_{t-1}, V_{t-1})$ なるデータより、 θ_{t-1} の更新された値 $\hat{\theta}_{t-1}$ とその分散 $\hat{\Sigma}_{t-1}$ が与えられる。

このような状況より、

②予測： $t-1$ 期までの情報で、 θ_t を予測する。この値を $\tilde{\theta}_{t|t-1}$ と表わし、このときの予測誤差の分散を $\tilde{\Sigma}_{t|t-1}$ で表わすことにする。

③この $\tilde{\theta}_{t|t-1}$ を用いて y_t の予測 $\tilde{y}_{t|t-1}$ を行う。

④更新：新しく t 期のデータ (y_t, V_t) が利用可能になったとき、予測によって求めていた θ_t の推定値 $\tilde{\theta}_{t|t-1}$ を更新する。この値を $\hat{\theta}_t$ と表わし、このときの分散を $\hat{\Sigma}_t$ で表わすことにする。

以下、この $\hat{\theta}_t$ と $\hat{\Sigma}_t$ を用いて②～④を繰り返す。この基本となるパターンは以下のように行われる。

①初期設定

まず、初期値に対して、以下を仮定する。

$$E(\theta_0), \quad \text{var}(\theta_0) \text{ は既知, 所与とし, それぞれ } \hat{\theta}_0, \hat{\Sigma}_0 \text{ で表わす. また} \\ E(\varepsilon_t \theta_0) = 0, \quad E(\Gamma_t \theta_0) = 0 \quad \forall t$$

② θ_t の予測： $t-1$ 期までの情報の下で、 θ_t の予測と予測誤差の評価を行う。
遷移方程式より $\Gamma_t = 0$ とおいて、

$$\tilde{\theta}_{t|t-1} = L\hat{\theta}_{t-1} \tag{3-2}$$

を得る。このとき、 θ_t の予測誤差は

$$\theta_t - \tilde{\theta}_{t|t-1} = (L\theta_{t-1} + M\Gamma_t) - L\hat{\theta}_{t-1} = L(\theta_{t-1} - \hat{\theta}_{t-1}) + M\Gamma_t \tag{3-3}$$

となり、 θ_t の予測誤差の期待値は0となる。

一方、 θ_t の予測誤差の分散は、

$$E[(\theta_t - \tilde{\theta}_{t|t-1})(\theta_t - \tilde{\theta}_{t|t-1})'] = LE(\theta_{t-1} - \hat{\theta}_{t-1})(\theta_{t-1} - \hat{\theta}_{t-1})'L' + ME(\Gamma_t \Gamma_t')M' \\ = L\hat{\Sigma}_{t-1}L' + MUM' = \tilde{\Sigma}_{t|t-1} \tag{3-4}$$

となる。

③ y_t の予測：②で求めた $\tilde{\theta}_{t|t-1}$ を用いて y_t の予測と予測誤差の評価を行う。

測定方程式より $\varepsilon_t = 0$ とおいて、

$$\tilde{y}_{t|t-1} = V_t \tilde{\theta}_{t|t-1} \tag{3-5}$$

を得る。このとき、 y_t の予測誤差は、

$$e_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1} = V_t \theta_t + \varepsilon_t - V_t \tilde{\theta}_{t|t-1} = V_t (\theta_t - \tilde{\theta}_{t|t-1}) + \varepsilon_t \quad (3-6)$$

となり、 y_t の予測誤差の期待値は 0 となる。

一方、 y_t の予測誤差の分散は、

$$\begin{aligned} E(e_t e_t') &= E[(y_t - \hat{y}_{t|t-1})(y_t - \hat{y}_{t|t-1})'] \\ &= V_t E[(\theta_t - \tilde{\theta}_{t|t-1})(\theta_t - \tilde{\theta}_{t|t-1})'] V_t' + E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' + W \end{aligned} \quad (3-7)$$

となる。

④ θ_t の更新

t 期に y_t , V_t という新しい観測値が得られたときに、 y_t とその予測量 $\hat{y}_{t|t-1}$ との差を利用して、 θ_t の推定量の改善を行う。

いま、 θ_t , y_t は、

$$\begin{aligned} \theta_t &= \tilde{\theta}_{t|t-1} + (\theta_t - \tilde{\theta}_{t|t-1}) \\ y_t &= V_t \tilde{\theta}_{t|t-1} + [V_t (\theta_t - \tilde{\theta}_{t|t-1}) + \varepsilon_t] \end{aligned}$$

と表わされる。ここでそれぞれの第 1 項は予測量、第 2 項は予測誤差である。したがって $\begin{bmatrix} \theta_t \\ y_t \end{bmatrix}$

の期待値と分散は以下で与えられる。

$$E \begin{bmatrix} \theta_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{t|t-1} \\ V_t \tilde{\theta}_{t|t-1} \end{bmatrix}, \quad Cov \begin{bmatrix} \theta_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{t|t-1} & \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' \\ V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} & V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' + W \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

ここで、 θ_t と y_t について正規性を仮定すると、

$$\begin{bmatrix} \theta_t \\ y_t \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{t|t-1} \\ V_t \tilde{\theta}_{t|t-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{t|t-1} & \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' \\ V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} & V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' + W \end{bmatrix} \right) \quad (3-9)$$

となる。

一般に、2 変量正規分布

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \right)$$

において、 y の条件つき x の分布は次のようになることが知られている⁶⁾。

$$x|y \sim N(\mu_{x|y}, \sigma_{xx|y}).$$

ここで、 $\mu_{x|y} = \mu_x + \sigma_{xy} \sigma_{yy}^{-1} (y - \mu_y)$

$$\sigma_{xx|y} = \sigma_{xx} - \sigma_{xy} \sigma_{yy}^{-1} \sigma_{yx}$$

したがって、 θ_t の更新は t 期の y_t が得られたときの条件つき θ_t の分布として与えられ、次のようになる。

$$\theta_t | y_t \sim N(\hat{\theta}_t, \hat{\Sigma}_t) \quad (3-10)$$

ただし、

$$\hat{\theta}_t = \tilde{\theta}_{t|t-1} + \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' [V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' + W]^{-1} (y_t - V_t \tilde{\theta}_{t|t-1}) \quad (3-11)$$

6) 例えば、岩田 [8] 1983, pp. 331-333 を参照せよ。

$$\hat{\Sigma}_t = \tilde{\Sigma}_{t|t-1} - \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' [V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' + W]^{-1} V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} \quad (3-12)$$

§4 ハリソン・ステイブンスモデル：Single-State Model

4つの状態を考慮せずに1つの状態だけで上記のカルマンフィルターモデルに基づき、ハリソン・ステイブンスモデルの基本モデルを解説する。

ハリソン・ステイブンスの基本モデルは、具体的には以下のような手順で行われる。ここで d_t の t 期以前の系列を $d_{(t)}$ で表わすことにする。

①初期設定として、

$$\text{事前分布, } (\mu_{t-1}, \beta_{t-1} | d_{(t-1)}) \sim N([m_{t-1}, b_{t-1}], \hat{\Sigma}_{t-1}) = N(\Phi_{t-1}) \quad [4-A]$$

が与えられているとする。ここで、

$$E(\mu_{t-1}) = m_{t-1} \quad (4-1)$$

$$E(\beta_{t-1}) = b_{t-1} \quad (4-2)$$

とおく。上式において分散は、

$$\hat{\Sigma}_{t-1} = \begin{bmatrix} v_{\mu\mu,t-1} & v_{\mu\beta,t-1} \\ v_{\mu\beta,t-1} & v_{\beta\beta,t-1} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

で表わすことにする。但し、 $v_{\mu\mu,t-1} = E(\mu_{t-1} - m_{t-1})^2$, $v_{\mu\beta,t-1} = E(\mu_{t-1} - m_{t-1})(\beta_{t-1} - b_{t-1})$, $v_{\beta\beta,t-1} = E(\beta_{t-1} - b_{t-1})^2$ である。これらをまとめて、

$$\Phi_{t-1} = \{m_{t-1}, b_{t-1}, v_{\mu\mu,t-1}, v_{\mu\beta,t-1}, v_{\beta\beta,t-1}\}$$

とおく。また、 d の攪乱項 ε の分散すなわち $(d_t | \mu_t)$ の分散を V_ε , μ の攪乱項の分散すなわち $(\mu_t | \mu_{t-1}, \beta_t)$ の分散を V_γ , β の攪乱項の分散すなわち $(\beta_t | \beta_{t-1})$ の分散を V_δ とする。そして、これらが既知であることを前提とする。また、各期毎に正規分布することを前提とする。

② $t-1$ 期までの情報を用いて θ_t の予測を行う。具体的には $(\mu_t, \beta_t | d_{(t-1)})$ の期待値と分散を求める。ここでの分布は

$$(\mu_t, \beta_t | d_{(t-1)}) \sim N([m_{t-1} + b_{t-1}, b_{t-1}], \tilde{\Sigma}_{t|t-1})$$

となる。すなわち、

$$\tilde{\mu}_{t|t-1} = m_{t-1} + b_{t-1} \quad (4-4)$$

$$\tilde{\beta}_{t|t-1} = b_{t-1} \quad (4-5)$$

である。ここで分散共分散行列を

$$\tilde{\Sigma}_{t|t-1} = \begin{bmatrix} r_{11,t} & r_{12,t} \\ r_{12,t} & r_{22,t} \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

で表わすことにする。このとき (3-4) より、

$$\tilde{\Sigma}_{t|t-1} = L \hat{\Sigma}_{t-1} L' + M U M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\mu\mu,t-1} & v_{\mu\beta,t-1} \\ v_{\mu\beta,t-1} & v_{\beta\beta,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\gamma & 0 \\ 0 & V_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから、個々の要素は、

$$r_{11,t} = v_{\mu\mu,t-1} + 2v_{\mu\beta,t-1} + v_{\beta\beta,t-1} + V_\gamma + V_\delta$$

$$r_{12,t} = v_{\mu\beta,t-1} + v_{\beta\beta,t-1} + V_\delta$$

$$r_{22,t} = v_{\beta\beta,t-1} + V_\delta$$

となる。

③測定値の予測 ($d_t | d_{(t-1)}$) を行う。予測値は

$$\tilde{d}_{t|t-1} = (m_{t-1} + b_{t-1}) s_t \quad (4-7)$$

となる⁷⁾。したがって d_t の予測誤差は

$$e_t = d_t - \tilde{d}_{t|t-1} \quad (4-8)$$

であり、その分散については、 $E(e_t e_t') = V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' + W$ より

$$V_{e_t} = s_t^2 r_{11,t} + V_\varepsilon \quad (4-9)$$

となる。

④更新を行う。 μ_t と β_t の更新された値 $\hat{\mu}_t$ と $\hat{\beta}_t$ は以下のように求まる。すなわち、(3-11) より、

$\hat{\theta}_t = \tilde{\theta}_{t|t-1} + \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' [V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' + W]^{-1} (y_t - V_t \tilde{\theta}_{t|t-1})$ であるから、

$$\hat{\mu}_t = m_{t-1} + b_{t-1} + r_{11,t} s_t / V_{e_t} \cdot e_t \quad (4-10)$$

$$\hat{\beta}_t = b_{t-1} + r_{12,t} s_t / V_{e_t} \cdot e_t \quad (4-11)$$

となる。このとき分散共分散行列を

$$\hat{\Sigma}_t = \begin{bmatrix} v_{\mu\mu,t} & v_{\mu\beta,t} \\ v_{\mu\beta,t} & v_{\beta\beta,t} \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

とおく。いま、(3-12) より、

$$\hat{\Sigma}_t = \tilde{\Sigma}_{t|t-1} - \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' [V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1} V_t' + W]^{-1} V_t \tilde{\Sigma}_{t|t-1}$$

であるから、個々の要素は、 $A_{1,t} = s_t r_{11,t} / V_{e_t}$, $A_{2,t} = s_t r_{12,t} / V_{e_t}$ とおくと、

$$v_{\mu\mu,t} = r_{11,t} - s_t^2 r_{11,t}^2 / V_{e_t} = r_{11,t} - A_{1,t}^2 V_{e_t}$$

$$v_{\mu\beta,t} = r_{12,t} - s_t^2 r_{11,t} r_{12,t} / V_{e_t} = r_{12,t} - A_{1,t} A_{2,t} V_{e_t}$$

$$v_{\beta\beta,t} = r_{22,t} - s_t^2 r_{12,t}^2 / V_{e_t} = r_{22,t} - A_{2,t}^2 V_{e_t}$$

と表わされる。

このようにして事後分布は

$$(\mu_t, \beta_t | d_t) \sim N([\hat{\mu}_t, \hat{\beta}_t], \hat{\Sigma}_t) = N(\Phi_t)$$

$$\Phi_t = \{m_{t-1}, b_{t-1}, v_{\mu\mu,t}, v_{\mu\beta,t}, v_{\beta\beta,t}; V_\varepsilon, V_\gamma, V_\delta\} \quad [4-B]$$

となる。

§ 5 ハリソン・スティーブンスモデルにおける4つの状態：Multi-State Model

ハリソン・スティーブンスモデルの特徴は、前述したように、4つの状態の組み合わせによって事態が推移するところにあり、ここでは、前節の議論が拡張される。分析に際しては、定常

7) 季節性 s_t は本来データとして考えられるものである。しかし、ハリソンとスティーブンスは、これを1として扱い、無視している。

(通常の変動)を状態1, ステップ変化を状態2, 勾配変化を状態3, 一時的変化を状態4とする。ハリソン・スティーブンスモデルがベイジアンと呼ばれるゆえんは, この4つの状態に推移する場面で, 事前事後分布を考える点とカルマンフィルターを用いる点である。

①初期状態として, $t-1$ 期の状態 i において

$$\hat{\mu}_{t-1}^{(i)} = m_{t-1}^{(i)} \tag{5-1}$$

$$\hat{\beta}_{t-1}^{(i)} = b_{t-1}^{(i)} \tag{5-2}$$

$$\hat{\Sigma}_{t-1}^{(i)} = \begin{bmatrix} v_{\mu\mu,t-1}^{(i)} & v_{\mu\beta,t-1}^{(i)} \\ v_{\mu\beta,t-1}^{(i)} & v_{\beta\beta,t-1}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{5-3}$$

であるとする。なお, $t-1$ 期に状態が i である確率を事前確率として $q_{t-1}^{(i)}$ で表わす ($q_{t-1}^{(i)}$ の初期値は所与:ハリソン・スティーブンスモデルでは4状態を扱うので, ここでは (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) とする)。

ここで $\Phi_{t-1}^{(i)}$ で $t-1$ 期に状態が i であるときの分布のパラメータを表わすと, $\Phi_{t-1}^{(i)} = \{m_{t-1}^{(i)}, b_{t-1}^{(i)}, v_{\mu\mu,t-1}^{(i)}, v_{\mu\beta,t-1}^{(i)}, v_{\beta\beta,t-1}^{(i)}; V_\epsilon^{(i)}, V_\delta^{(i)}, V_\gamma^{(i)}\}$ となる。事前に各分布は既知であり, これらを合成して全体の分布が決定される。すなわち,

$$(\mu_{t-1}, \beta_{t-1} | d_{t-1}) \sim \sum_{i=1}^4 q_{t-1}^{(i)} \cdot N(\Phi_{t-1}^{(i)}) \tag{5-A}$$

である⁸⁾。ただし $q_{t-1}^{(i)}$ は $t-1$ という添え字の通り事前確率であり, [5-A] は事前分布である。

ここで, $t-1$ 期の状態 $S_{t-1}=i$ より t 期の状態 $S_t=j$ への推移, 更新を考える。

②まず, 各状態の t 期についての μ と β の予測は,

8) 一般に状態変数が $S_t=j$ にあるとき, 観測された変数 y_t が正規母集団 $N(\mu_j, \sigma_j^2)$ から抽出されるとすると, 観測された変数 y_t の状態変数 S_t の条件つき確率密度関数は

$$f(y_t | S_t=j; \mu_j, \sigma_j^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left\{-\frac{(y_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right\}, \quad j=1, 2 \dots N$$

となる。

一方, 状態変数 S_t が j をとる無条件確率を q_j で表わすと

$\Pr(S_t=j; \mu_j, \sigma_j^2) = q_j$ となる。ここで, $\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B)\Pr(B)$ より,

$$\Pr(y_t, S_t; \mu_j, \sigma_j^2) = \frac{q_j}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left\{-\frac{(y_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right\}$$

したがって, いま $N=4$ として y_t の無条件確率密度関数を考えると, j について和をとることにより

$$\begin{aligned} f(y_t; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2) &= \sum_{j=1}^4 \Pr(y_t, S_t; \mu_j, \sigma_j^2) \\ &= \frac{q_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(y_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} + \frac{q_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(y_t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} \\ &\quad + \frac{q_3}{\sqrt{2\pi}\sigma_3} \exp\left\{-\frac{(y_t - \mu_3)^2}{2\sigma_3^2}\right\} + \frac{q_4}{\sqrt{2\pi}\sigma_4} \exp\left\{-\frac{(y_t - \mu_4)^2}{2\sigma_4^2}\right\} \end{aligned}$$

となる。

これより y_t の期待値と分散は次のようになる。

$$\begin{aligned} E(y_t) &= q_1\mu_1 + q_2\mu_2 + q_3\mu_3 + q_4\mu_4 \\ V(y_t) &= q_1\{\sigma_1^2 + (\mu_1 - E(y_t))^2\} + q_2\{\sigma_2^2 + (\mu_2 - E(y_t))^2\} \\ &\quad + q_3\{\sigma_3^2 + (\mu_3 - E(y_t))^2\} + q_4\{\sigma_4^2 + (\mu_4 - E(y_t))^2\} \end{aligned}$$

この分散の導出の詳細については, 宇野 [11] を参照せよ。

$$\tilde{\mu}_t^{(i,j)} = m_{t-1}^{(i)} + b_{t-1}^{(i)} \quad (5-4)$$

$$\tilde{\beta}_t^{(i,j)} = b_{t-1}^{(i)} \quad (5-5)$$

となる。次にこれらの分散共分散行列を

$$\tilde{\Sigma}_t^{(i,j)} = \begin{bmatrix} r_{11,t}^{(i,j)} & r_{12,t}^{(i,j)} \\ r_{12,t}^{(i,j)} & r_{22,t}^{(i,j)} \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

で表わすことにする。ここで $\tilde{\Sigma}_t^{(i,j)} = L\hat{\Sigma}_{t-1}^{(i)}L' + MU^{(j)}M'$ とおくことにより、(5-6)の各要素は次のように与えられる。

$$r_{11,t}^{(i,j)} = v_{\mu\mu,t-1}^{(i)} + 2v_{\mu\beta,t-1}^{(i)} + v_{\beta\beta,t-1}^{(i)} + V_r^{(j)} + V_\delta^{(j)}$$

$$r_{12,t}^{(i,j)} = v_{\mu\beta,t-1}^{(i)} + v_{\beta\beta,t-1}^{(i)} + V_\delta^{(j)}$$

$$r_{22,t}^{(i,j)} = v_{\beta\beta,t-1}^{(i)} + V_\delta^{(j)}$$

③以上の手順により、各状態の予測値は

$$\tilde{d}_t^{(i,j)} = (m_{t-1}^{(i)} + b_{t-1}^{(i)}) s_t \quad (5-7)$$

となる。

ここで各状態の誤差は、

$$e_t^{(i)} = d_t - (m_{t-1}^{(i)} + b_{t-1}^{(i)}) s_t \quad (5-8)$$

であり⁹⁾、さらに予測誤差の分散は

$$V_{e_t}^{(i,j)} = s_t^2 r_{11,t}^{(i,j)} + V_e^{(j)} \quad (5-9)$$

となる。

④更新された値とその分散共分散行列は

$$\hat{\mu}_t^{(i,j)} = m_{t-1}^{(i)} + b_{t-1}^{(i)} + r_{11,t}^{(i,j)} s_t / V_{e_t}^{(i,j)} \cdot e_t^{(i)} \quad (5-10)$$

$$\hat{\beta}_t^{(i,j)} = b_{t-1}^{(i)} + r_{12,t}^{(i,j)} s_t / V_{e_t}^{(i,j)} \cdot e_t^{(i)} \quad (5-11)$$

$$\hat{\Sigma}_t^{(i,j)} = \begin{bmatrix} v_{\mu\mu,t}^{(i,j)} & v_{\mu\beta,t}^{(i,j)} \\ v_{\mu\beta,t}^{(i,j)} & v_{\beta\beta,t}^{(i,j)} \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

となる。

ここで、 $v_{\mu\mu,t}^{(i,j)} = r_{11,t}^{(i,j)} - A_{1,t}^{(i,j)2} V_{e_t}^{(i,j)}$

$$v_{\mu\beta,t}^{(i,j)} = r_{12,t}^{(i,j)} - A_{1,t}^{(i,j)} A_{2,t}^{(i,j)} V_{e_t}^{(i,j)}$$

$$v_{\beta\beta,t}^{(i,j)} = r_{22,t}^{(i,j)} - A_{2,t}^{(i,j)2} V_{e_t}^{(i,j)}$$

であり、また

$$A_{1,t}^{(i,j)} = s_t r_{11,t}^{(i,j)} / V_{e_t}^{(i,j)}$$

$$A_{2,t}^{(i,j)} = s_t r_{12,t}^{(i,j)} / V_{e_t}^{(i,j)}$$

である。

以上の結果をまとめると $t-1$ 期の状態 $S_{t-1}=i$ より t 期の状態 $S_t=j$ への推移、更新による16通りの事後分布は

9) $e_t^{(i,j)} = d_t - \tilde{d}_t^{(i,j)} = d_t - (m_{t-1}^{(i)} + b_{t-1}^{(i)}) s_t = e_t^{(i)}$

$$(\mu_t^{(i,j)}, \beta_t^{(i,j)} | d_t, S_t=j, S_{t-1}=i) \sim N([\hat{\mu}_t^{(i,j)}, \hat{\beta}_t^{(i,j)}], \hat{\Sigma}_t^{(i,j)}) = N(\Phi_t^{(i,j)}) \quad [5-B1]$$

$$\Phi_t^{(i,j)} = \{m_{t-1}^{(i)}, b_{t-1}^{(i)}, v_{\mu\mu,t-1}^{(i)}, v_{\beta\beta,t-1}^{(i)}, v_{\mu\beta,t-1}^{(i)}; V_\varepsilon^{(j)}, V_\delta^{(j)}, V_\gamma^{(j)}\}$$

となる¹⁰⁾。

ここで、彼らのモデルの問題点として、 $V_\varepsilon^{(j)}$, $V_\delta^{(j)}$, $V_\gamma^{(j)}$ が時間 t に依存しないすべての期において一定の値として与えられている点は注意すべきである。

⑤展開：部分確率

まず t 期に状態 S_t が j に移る確率を推移確率 π_j によって表わす。次に $t-1$ 期の状態 S_{t-1} が i であり、かつ t 期の状態 S_t が j になる結合確率を本稿では部分確率と呼び、それを $p_t^{(i,j)}$ で表わすが、これはベイズの定理の応用より、次のように求められる。なお、ここでは、4 状態を扱うので、それらは16通りある。

$$\begin{aligned} p_t^{(i,j)} &= \Pr(S_t=j, S_{t-1}=i | d_t) \\ &= k \Pr(d_t | S_t=j, S_{t-1}=i, d_{(t-1)}) \Pr(S_t=j | S_{t-1}=i, d_{(t-1)}) \Pr(S_{t-1}=i | d_{(t-1)}) \end{aligned} \quad (5-13)$$

ここで、 $k=1/\Pr(d_t | d_{(t-1)})$ である。第2項 $\Pr(d_t | S_t=j, S_{t-1}=i, d_{(t-1)})$ は尤度関数 L を用いて、

$$L(d_t | S_t=j, S_{t-1}=i, d_{(t-1)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V_{\varepsilon_t}^{(i,j)}}} \exp\left[-\frac{\{d_t - s_t(m_{t-1}^{(i)} + b_{t-1}^{(i)})\}^2}{2V_{\varepsilon_t}^{(i,j)}}\right]$$

と表わされる。また第3項 $\Pr(S_t=j | S_{t-1}=i, d_{(t-1)})$ は推移確率 π_j を表しており、第4項 $\Pr(S_{t-1}=i | d_{(t-1)})$ は、 $q_t^{(i)}$ すなわち $t-1$ 期の事後確率である¹¹⁾。

このようにして (5-13) によって4つの状態は、16の状態へ展開される。具体的には、部分確率 $p_t^{(i,j)}$ は、

$$p_t^{(i,j)} \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi V_{\varepsilon_t}^{(i,j)}}} \exp\left[-\frac{e_t^{(i)2}}{2V_{\varepsilon_t}^{(i,j)}}\right] \times \pi_j \times q_t^{(i)} \quad (5-14)$$

という形で近似的に求められる。

ここで、(5-14) の第1項の計算において、各期において一定の $V_\varepsilon^{(j)}$, $V_\delta^{(j)}$, $V_\gamma^{(j)}$ が用いられていること、また同様に第2項 π_j についてもすべての期において一定の値が与えられている点、これらは新たに得られる情報を利用して分布を改善していくベイジアンアプローチとしては問題が残るであろうと思われる。

よって、上記の [5-B1] における $t-1$ 期に状態 i にあり、かつ t 期には状態 j になるという16の状態の分布にその確率を掛け合わせることによって、合成された(完結した)事後分布は次のように表わされる。

$$(\mu_t, \beta_t | d_t) \sim \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p_t^{(i,j)} N(\Phi_t^{(i,j)}) \quad [5-B2]$$

10) $\Phi_t^{(i,j)} = \{\hat{\mu}_t^{(i,j)}, \hat{\beta}_t^{(i,j)}, v_{\mu\mu,t}^{(i,j)}, v_{\beta\beta,t}^{(i,j)}, v_{\mu\beta,t}^{(i,j)}; V_\varepsilon^{(j)}, V_\delta^{(j)}, V_\gamma^{(j)}\}$ であるが、(5-10)~(5-12) より

$\Phi_t^{(i,j)} = \{m_{t-1}^{(i)}, b_{t-1}^{(i)}, v_{\mu\mu,t-1}^{(i)}, v_{\beta\beta,t-1}^{(i)}, v_{\mu\beta,t-1}^{(i)}; V_\varepsilon^{(j)}, V_\delta^{(j)}, V_\gamma^{(j)}\}$ となる。

11) これはまた t 期の事前確率 $q_t^{(i)}$ を表わしている。

⑥縮約

t 期の事後確率は、部分確率の和として $q_t^{(j)} = \sum_{i=1}^4 p_t^{(i,j)}$ ($j=1, 2, 3, 4$) で得られ、これがまた次の期間 $t+1$ 期の事前確率となる。同様に、16通りに展開されたすべてのパラメータもまた4通りに縮約される。

ここでハリソン・スティーブンスは、縮約の方法として以下の方法を用いている。すなわち、 t 期における状態 j について、

$$q_t^{(j)} = \sum_{i=1}^4 p_t^{(i,j)} \quad (5-15)$$

$$\hat{\theta}_t^{(j)} = \sum_{i=1}^4 p_t^{(i,j)} \hat{\theta}_t^{(i,j)} / q_t^{(j)} \quad (5-16)$$

$$\hat{\Sigma}_t^{(j)} = \sum_{i=1}^4 p_t^{(i,j)} [\hat{\Sigma}_t^{(i,j)} + (\hat{\theta}_t^{(i,j)} - \hat{\theta}_t^{(j)}) (\hat{\theta}_t^{(i,j)} - \hat{\theta}_t^{(j)})'] / q_t^{(j)} \quad (5-17)$$

である¹²⁾。(5-16) は具体的には

$$\hat{\mu}_t^{(j)} = m_t^{(j)} = \sum_{i=1}^4 p_t^{(i,j)} \hat{\mu}_t^{(i,j)} / q_t^{(j)} \quad (5-18)$$

$$\hat{\beta}_t^{(j)} = b_t^{(j)} = \sum_{i=1}^4 p_t^{(i,j)} \hat{\beta}_t^{(i,j)} / q_t^{(j)} \quad (5-19)$$

さらに (5-17) は、

$$v_{\mu\mu,t}^{(j)} = \sum_{i=1}^4 p_t^{(i,j)} [v_{\mu\mu,t}^{(i,j)} + (\hat{\mu}_t^{(i,j)} - m_t^{(j)})^2] / q_t^{(j)} \quad (5-20)$$

$$v_{\beta\beta,t}^{(j)} = \sum_{i=1}^4 p_t^{(i,j)} [v_{\beta\beta,t}^{(i,j)} + (\hat{\beta}_t^{(i,j)} - b_t^{(j)})^2] / q_t^{(j)} \quad (5-21)$$

$$v_{\mu\beta,t}^{(j)} = \sum_{i=1}^4 p_t^{(i,j)} [v_{\mu\beta,t}^{(i,j)} + (\hat{\mu}_t^{(i,j)} - m_t^{(j)}) (\hat{\beta}_t^{(i,j)} - b_t^{(j)})] / q_t^{(j)} \quad (5-22)$$

である。

以上のようにして今期の縮約された事後分布による合成された事後分布は、

$$(\mu_t, \beta_t | d_t) \sim \sum_{j=1}^4 q_t^{(j)} \cdot N(\Phi_t^{(j)}) \quad [5-B3]$$

ただし、 $\Phi_t^{(j)} = \{m_t^{(j)}, b_t^{(j)}, v_{\mu\mu,t}^{(j)}, v_{\beta\beta,t}^{(j)}, v_{\mu\beta,t}^{(j)}; V_\epsilon^{(j)}, V_\delta^{(j)}, V_\gamma^{(j)}\}$

となる。そしてこれが次期の事前分布となる。すなわち、これを用いて①～⑥が繰り返され、進んでいく。このように展開と合成そして縮約を繰り返すとするのが、ハリソン・スティーブンスモデルの特徴である。この過程を図解したものが前述の図 2-2 である。

§ 6 検証：貨幣乗数の予測とあるバス会社の売上収入の予測

ここで、上述のハリソン・スティーブンスモデルを用いて予測を行い、うえで指摘した問題点を検証してみることにする。

12) 注8を参照せよ。

a) 貨幣乗数の予測

まずは、マネーサプライ/マネタリーベースとして計算した貨幣乗数のデータを用いる。期間は1970年第1半期から1998年第1四半期までである。

なお、本稿で用いられたデータおよびその出所は以下の通りである。

マネーサプライ：M2+CD，平均残高，日本銀行『経済統計月報』，E-viewsのX11により季節調整済み。

マネタリーベース：平均残高，日本銀行『経済統計月報』，E-viewsのX11により季節調整済み。

こうして季節調整済みデータを用いることにより，ここではハリソン・スティーブンスモデルにおいて，毎期のデータとして与えなければならない s_t を $s_t = 1$ とおいて処理した。なお，初期値としては，すべての i について $m_{i-1}^{(i)} = 10$ ， $b_{i-1}^{(i)} = 0.5$ ， $\hat{\Sigma}_{i-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする。

はじめに，ハリソン・スティーブンスによって提示された推移確率と基本分散比を用いて貨幣乗数の予測をしたところ，結果は図5-1のようになり，このとき予測の平均平方誤差は0.3456であった。

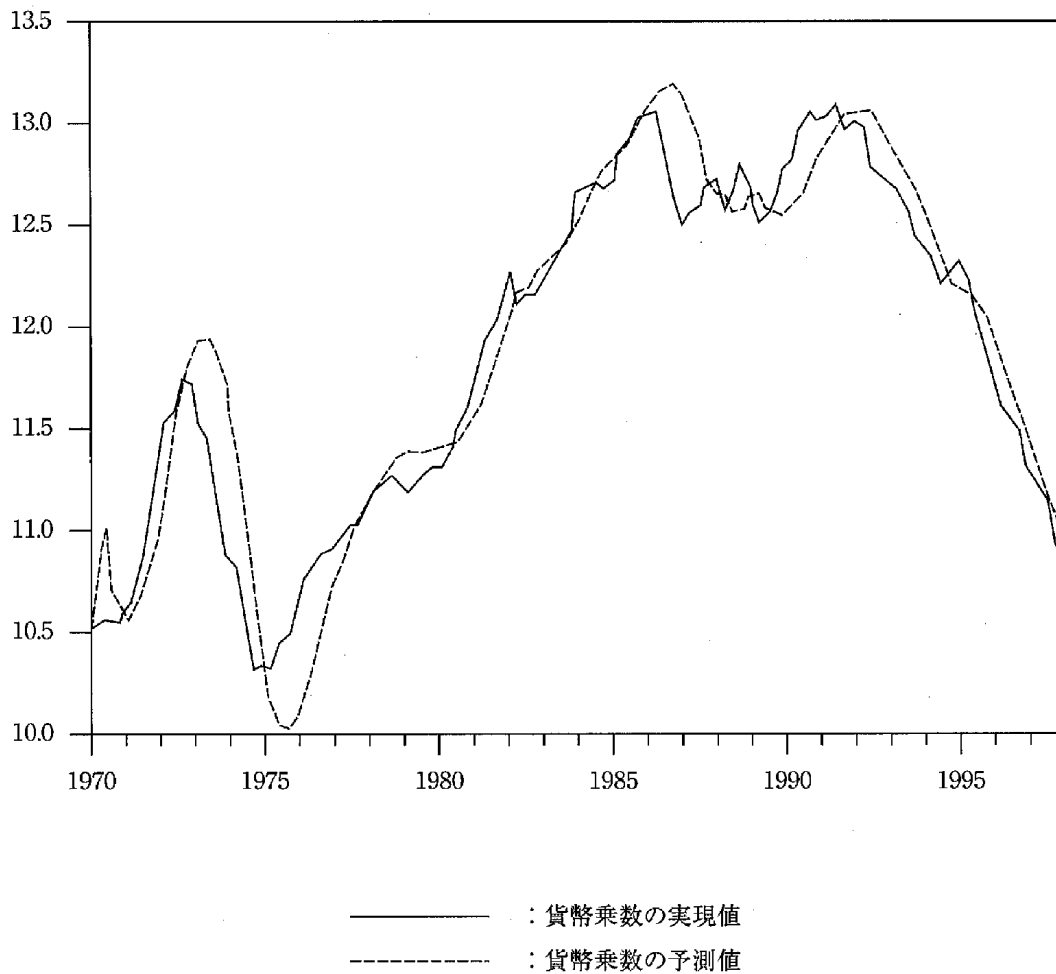
このモデルの利点はカルマンフィルターモデルによる予測に加えて推移確率と基本分散比に予測者の主観を反映させることができる点にある。しかしそこにはモデルの性質からして当然恣意性が入るし，またそれらの適切な値を得ることに困難が伴う。そこで，そうした主観をあえて取り除き，各状態への推移確率を均一にし，また基本分散比もすべて1に固定して計測してみた。これは基本的にはカルマンフィルターモデルだけで行う予測であり，§4で示したSingle State Modelに等しい。この予測結果は図5-2の通りである。予測の平均平方誤差は0.1224となった¹³⁾。以上により，両者を比較すると，カルマンフィルターだけで行う予測の方が結果的に良い予測をしていることを示している。

b) あるバス会社の売上収入の予測

次にあるバス会社の売上収入について，ハリソン・スティーブンスによって提示された推移確率と基本分散比を用いた予測とカルマンフィルターモデルだけで行う予測を試みた。期間は1960年2月から1972年2月までである。データは季節性を除くために対前年同月比変化率にしてある。なお，データの出所は，土谷 [10] 2001である。

13) ハリソン・スティーブンスのケースには各基本分散比にさらに $\frac{1}{101}$ のウェイトを乗じ，カルマンフィルターモデルには各基本分散比に $\frac{1}{3}$ のウェイトを乗じて，両者の分散ができるだけ共通になるよう調整してある。前者では各状態の分散比の合計が最大のもので101となっている。そこで $\frac{1}{100}$ のウェイトを掛けた場合，定常や勾配の変化のように分散比の合計が1より小さくなる状態がある。一方，後者の場合は，分散比の合計はすべての状態において1となる。それでも前者より後者の方が予測の平均平方誤差は小さく，予測の精度は高くなっている。

図 5-1 ハリソン・スティブンスモデルによる貨幣乗数の予測



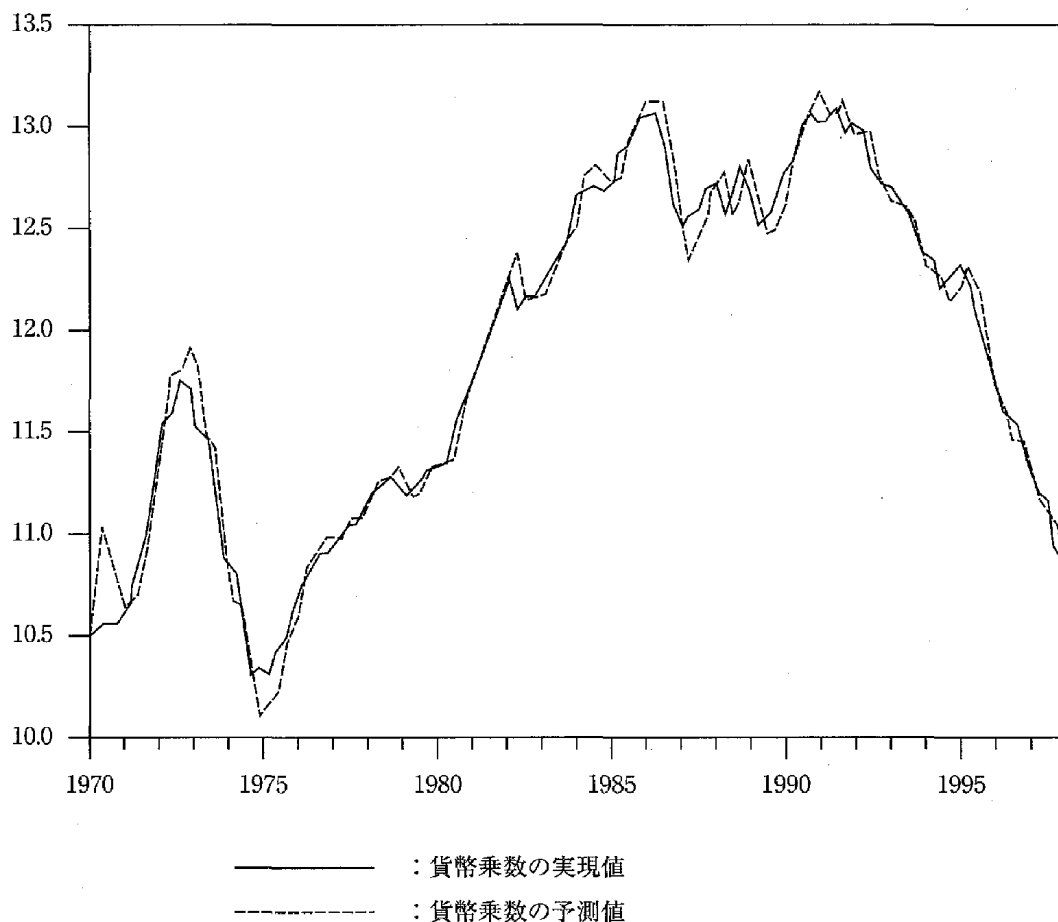
初期値としては、ここでもすべての i について $m_{i-1}^{(i)}=10$, $b_{i-1}^{(i)}=0.5$, $\Sigma_{i-1}^{(i)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を用いている。前者の結果は図 5-3 のようになり、予測の平均平方誤差は 12.1202 であり、一方後者の結果は図 5-4 のようになり、予測の平均平方誤差は 10.4820 となった。やはりこのケースでもカルマンフィルターだけで行う予測の方が良い予測をしていることになった。

§7 おわりに

§6 の検証例からも確認されたように、主観的判断の取り方によっては、このハリソンとスティブンスのモデルは必ずしも予測の精度を高めることにはならないことがわかった。そこで、現実に近い予測値がよい予測値であるとするならば、よい予測を得るためにどのような主観を持つべきかが、まず問われることになる。

次にベイジアンアプローチとしては、新たな情報が取り入れられることによって事前分布がよ

図 5-2 カルマンフィルターモデルによる貨幣乗数の予測



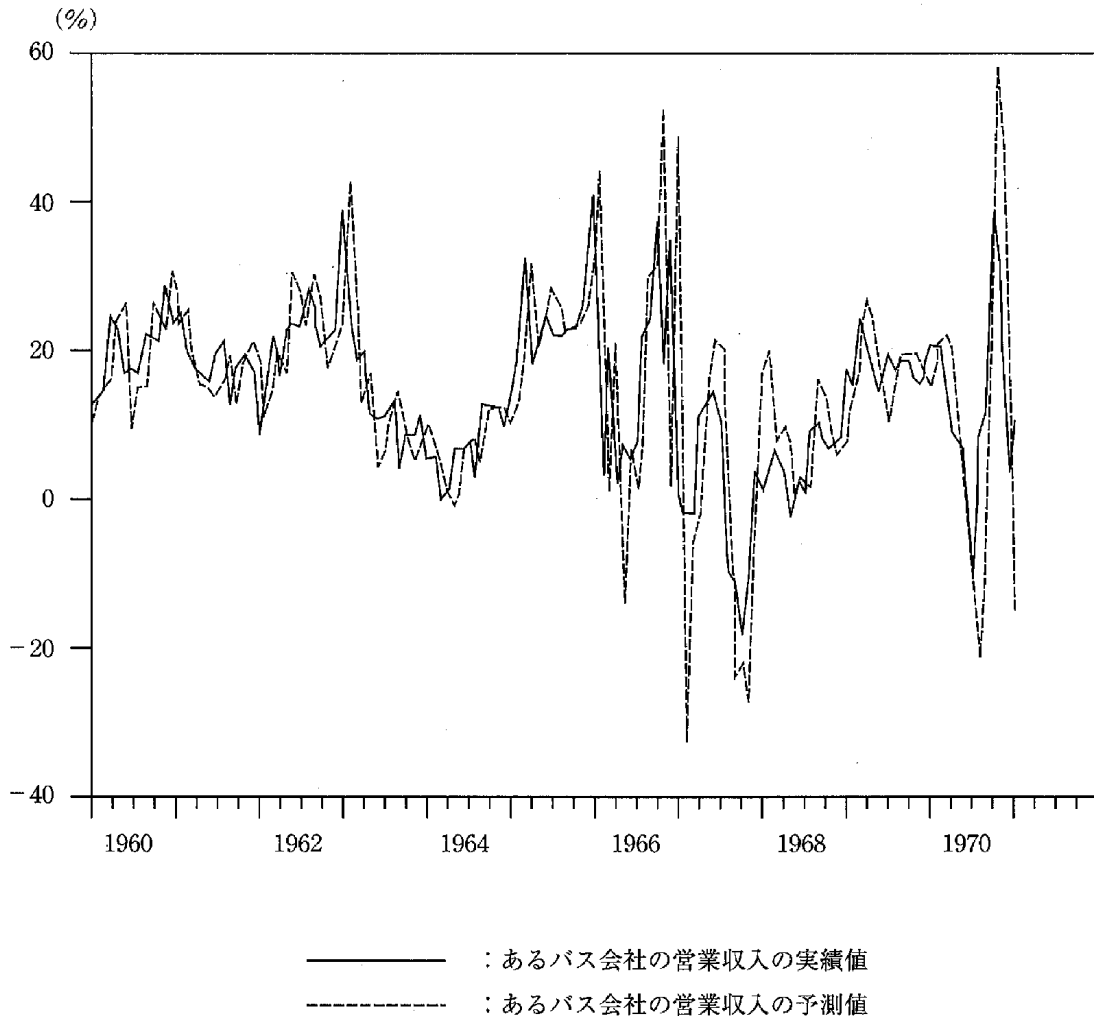
り優れた事後分布に修正されることに利点であるわけである。ところが、彼らのモデルにおいては每期一定の基本分散比 $V_e^{(j)}$, $V_\theta^{(j)}$, $V_\gamma^{(j)}$ と推移確率 π_t を与えているので、事後分布を形成する際にベイジアンアプローチとしてはこの点が問題である。§2と§5で指摘した通りである。もちろん、彼らのモデルにおいてもカルマンフィルターにより新たな観測値が新しい情報として利用されている。しかし、本来、小刻みに改定されるべきものである基本分散比と推移確率が一定の値のまま用いられていることで誤差が大きくなっている可能性が大きい。

したがって仮に主観に基づく適切な基本分散比と推移確率が得られるとしても、それらは每期新たに与えられなければ、ハリソン・スティーブンスモデルは本来のベイジアンアプローチとしてのパワーをもっていないということになる。あるいはハリソン・スティーブンスモデルは、基本分散比と推移確率が一定のままでも通用するような、1期2期という極めて短期間の予測に対してのみ適用可能なモデルであるといえよう。

引用文献

- [1] Bernardo, J. M. and Smith, A. F. M., *Bayesian Theory*, John-Wiley & Sons, 1994.

図 5-3 ハリソン・スティブンスモデルによるあるバス会社の営業収入の予測
(対前年同月比変化率)



- [2] Bomhoff, E. J. *Monetary Uncertainty*, North-Holland, 1983.
- [3] Bomhoff, E. J. *Financial Forecasting for Business and Economics*, Academic Press, 1994.
- [4] De Finetti, B., *Theory of Probability I*, John Wiley & Sons, 1990.
- [5] Hamilton, J. D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1994.
- [6] Harrison, P. J. and Stevens, C. F., "A Bayesian Approach to Short-term Forecasting," *Operational Research Quarterly* Vol. 22. No. 4, 1971.
- [7] Harrison, P. J. and Stevens, C. F., "Bayesian Forecasting," *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, Vol. 38 No. 3, 1976.
- [8] 岩田暁一『経済分析のための統計的方法 (第2版)』東洋経済新報社, 1983.
- [9] Makridakis, S., Wheelwright, S. C. and McGee, V., *Forecasting: Methods and Applications*, John-Wiley & Sons, 1978.
- [10] 土谷幸久「生存可能システムモデルの理論と実践についての研究」平成11~12年度科研費研究成果報告書, 2001.
- [11] 宇野淳一「Kalman-Harrison Model の研究」Mimeo 1978.

図 5-4 カルマンフィルターモデルによるあるバス会社の営業収入の予測
(対前年同月比変化率)

