# 派生証券のマルチンゲール・プライシング
# Martingale Pricing of Derivatives in Continuous Time

板垣　有記輔
Yukio Itagaki

株式などの危険証券を対象にした，その資産の将来価値が，その対象とする原資産の将来価格の動きに依存して決まる派生証券の価格付けについて，次の諸仮定（Jarrow and Turnbull [14], p. 34）を置いて，考察する．

仮定 1　市場は完全で，取引費用，ビッド・アスク・スプレッド，証拠金，空売り制限，税などの取引摩擦はない．

仮定 2　市場参加者は，取引相手から債務不履行をこうむるなどのカウンター・パーティ・リスクに遭遇することはない．

仮定 3　市場は競争的で，市場参加者は価格受容者として行動する．

仮定 4　市場参加者は，少ない富よりも多い富を選好する．

仮定 5　価格は，リスクなしで確実に利益を生むという裁定取引機会を排除するように，迅速に相互に調整される．

派生証券の価格は，その派生証券の将来収益の，その派生証券が対象とする原証券の将来の価格変動を表わす確率の下での平均値を求め，それを安全証券の利子率で割引いた現在価値に等しいと一見思われるが，実はそうではない．ある確率が存在して，その下で安全証券をニュメレールとする原証券の相対価格（割引価格）の将来値の期待値を，その相対価格の現在値に等しくさせるとき，すなわち原証券の相対価格にマルチンゲール性をもたらすとき，その確率を同値マルチンゲール測度という．

われわれは，派生証券のペイ・オフと全く同じペイ・オフを原証券と安全証券を適当に組み合せたポートフォリオを構成することによって複製できるという完備市場を想定する．この完備市場で無裁定であれば，派生証券の価格は，同値マルチンゲール測度の下で計算した派生証券の将来ペイ・オフの期待値を，安全証券の利子率で割引いた割引現在価値に等しいことを，複製ポートフォリオの構成法を提示しながら，証明する．逆に，同値マルチンゲール測度の下で，原証券と安全証券の市場で裁定取引機会がないことも明らかにする．

本稿の組み立てはつぎのとおりである．

1　金融証券の市場価格のダイナミックス

2　資金自己調達的ポートフォリオ

3　同値マルチンゲール測度

4　無裁定条件

5　複製ポートフォリオの構成

6　派生証券の無裁定価格

## 1　金融証券の市場価格のダイナミックス

金融市場には，安全証券（銀行口座）$B$，株式（危険証券）$S$ および株式を原資産（対象証券）とする満期日 $T$ をもつヨーロッパ型派生証券（デリバティブ）$D$ の3種類があるものとする．

$W(t)$ を確率空間 $(\Omega, F, P)$ 上で定義された標準ブラウン運動とし，標準フィルトレーション $F=\{F_t : t \geqq 0\}$, $F_t = F_t^B \vee N$, $0 \leqq t \leqq T$

$F_t^W = \sigma(W_s : 0 \leqq s \leqq t)$ : 時点 $t$ で利用可能な情報

$N=\{C \subset \Omega : \exists A,\ \text{s.t. } P(A)=0,\ C \subset A \in F_T^W\}$ : 確率がゼロである事象の部分集合の集合とする．

安全証券 $B$ の時点 $t$ の資産価値 $B(t)$ のダイナミックスは，時点 $t$ の瞬間利子率を $r(t)$ とすれば，微分方程式

$$dB(t) = r(t)B(t)\,dt$$

$$B(0)=1$$

で与えられるとすれば，その解 $B(t)$ は，

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(\tau)\,d\tau\right)$$

である．

株式 $S$ の時点 $t$ の株価 $S(t)$ のダイナミックスは，確率微分方程式

$$dS(t) = S(t)\left(\mu(t,\ \omega)\,dt + \sigma(t,\ \omega)\,dW(t)\right)$$

$$S(0) = S_0$$

で与えられるとすれば，その解 $S(t)$ は，

$$S(t) = S_0 \exp\left[\int_0^t \left(\mu(\tau,\ \omega) - \frac{1}{2}\sigma^2(\tau,\ w)\right)d\tau + \int_0^t \sigma(\tau,\ w)\,dW(\tau)\right]$$

である．ここで，

$$S(t+h) = S(t) + \int_t^{t+h} \mu(\tau,\ \omega)\,S(\tau)\,d\tau + \int_t^{t+h} \sigma(\tau,\ \omega)\,S(\tau)\,dW(\tau)$$

であるから，$P$－確率測度のもとでの条件付期待値をとると

$$E^P[S(t+h)\,|\,F_t] = S(t) + E^P\left[\int_t^{t+h} \mu(\tau,\ \omega)\,S(\tau)\,d\tau\,\middle|\,F_t\right]$$

$$+E^P\left[\int_t^{t+h} \sigma(\tau,\ \omega)\,S(\tau)\,dB(\tau)\,\middle|\,F_t\right]$$

伊藤確率積分の性質より右辺の第3項はゼロであることとフビニの定理から，

$$=S(t)+\int_t^{t+\mu}E^P[\mu(\tau,\ \omega)S(\tau)|F_t]d\tau$$

よって，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E^P[S(t+h)-S(t)|F_t]=\mu(t,\ \omega)S(t).$$

よって，

$$\mu(\tau,\ \omega)=\frac{1}{S(t)}\frac{d}{d\tau}E^P[S(t)|F_t].$$

つまりドリフト係数 $\mu(t,\ \omega)$ は，時点 $t$ において $S$ に投資した1円当りの瞬間的期待収益率と解釈できる．また，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}V^P[S(t+h)-S(t)|F_t]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E^P[(S(t+h)-S(t)-E^P[S(t+h)-S(t)|F_t])^2|F_t]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E^P\left[\int_t^{t+h}(\sigma(\tau,\ \omega)S(\tau)dW(\tau))^2|F_t\right]$$

伊藤確率積分の等長性により

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}E^P[\sigma^2(\tau,\ \omega)S^2(\tau)|F_t]d\tau$$

$$=E^P[\sigma^2(t,\ \omega)S^2(t)|F_t]$$

$$=\sigma^2(t,\ \omega)S^2(t)$$

よって

$$\sigma^2(t,\ \omega)=\frac{1}{S^2(t)}\frac{d}{dt}V^P[S(t)|F_t],$$

$$\sigma(t,\ \omega)=\frac{1}{S(t)}\sqrt{\frac{d}{dt}V^P[S(t)|F_t]}.$$

つまり拡散係数 $\sigma(t,\ \omega)$ は，時点 $t$ において $S$ に投資した1円当りの収益率の瞬間的標準偏差あると解釈できる．$\sigma(t,\ \omega)$ のことをボラティィリティともいう．

## 2 資金自己調達的ポートフォリオ

時点 $t\in[0,\ T]$ において，安全証券 $B$ を $b(t)$ 単位，株式 $S$ を $x(t)$ 単位それぞれ保有するときのポートフォリオ $(b(t),\ x(t))$ の価値額 $V(t)$ は，

$$V(t)=B(t)b(t)+S(t)x(t)$$

である．

ポートフォリオ $(b(t),\ x(t))$ が，各 $t\in[0,\ T]$ において

$$V(t)=V(0)+\int_0^t b(\tau)dB(\tau)+\int_0^t x(\tau)dS(\tau)$$

あるいは

$$dV(t)=b(t)dB(\tau)+x(\tau)dS(t)$$

を満たすとき，すなわちポートフォリオの価値額が任意の時点 $t\in[0,\ T]$ で，初期時点0のポ

ートフォリオの価値額と期間〔0, $t$〕の間の各証券のキャピタル・ゲインまたはキャピタル・ロスの累計額との和に等しいとき，このポートフォリオ ($b(t)$, $x(t)$ ($t \in [0, T]$)) を資金自己調達的ポートフォリオという．また資金自己調達的ポートフォリトを取引期間〔0, $T$〕にわたって構成することを資金自己調達的取引戦略という．

いま，任意の期間〔0, $t$〕($t \in [0, T]$) 中の任意の離散取引時刻を $t_0$, $t_1$, …, $t_j$, $t_{j+1}$, …, $t_N$ ($0=t_0<t_1<\cdots<t_j<t_{j+1}<\cdots<t_N=t$) とする．時刻 $t_j$ において，そのとき成立する価格体系 ($B(t_j)$, $S(t_j)$) の下でポートフォリオ ($b(t_j)$, $x(t_j)$) を保有し，次の時刻 $t_{j+1}$ において，そのとき成立する新価格体系 ($B(t_{j+1})$, $S(t_{j+1})$) の下で新ポートフォリオ ($b(t_{j+1})$, $x(t_{j+1})$) に組み替えるが，その際，新旧ポートフォリオの間に，次の関係式

$$B(t_{j+1})\,b(t_j)+S(t_{j+1})\,x(t_j)=B(t_{j+1})\,b(t_{j+1})+S(t_{j+1})\,x(t_{j+1})$$

あるいは

$$B(t_{j+1})\,(b(t_{j+1})-b(t_j))=-S(t_{j+1})\,(x(t_{j+1})-x(t_j))$$

が成立するように，すなわち新価格体系で評価した新旧ポートフォリオの価値が不変となるように，あるいは，一方の資産の売却額と他方の資産の購入額が丁度等しくなるようにし，ポートフォリオの外部から資金が流入したり，外部へ資金が流出することが少しもないように，旧ポートフォリオから新ポートフォリオに組み替えを行う．

この方式に従って新旧ポートフォリオが各離散時刻で行われるとすれば，任意の $t_j$ ($j=1, \cdots, N$) において，

$$b(t_{j-1})[B(t_{j-1})+B(t_j)-B(t_{j-1})+x(t_{j-1})[S(t_{j-1})+S(t_j)-S(t_{j-1})]$$
$$=b(t_j)\,B(t_j)+x(t_j)\,S(t_j)$$

が成立するので，

$$\begin{aligned}
b(t_N)\,B(t_N)+x(t_N)\,S(t_N)&=b(t_{N-1})\,B(t_{N-1})+x(t_{N-1})\,S(t_{N-1})+b(t_{N-1})[B(t_N)-B(t_{N-1})]\\
&\quad +x(t_{N-1})[S(t_N)-S(t_{N-1})]\\
&=b(t_{N-2})\,B(t_{N-2})+x(t_{N-2})\,S(t_{N-2})+\sum_{j=N-1}^{N} b(t_{j-1})[B(t_j)-B(t_{j-1})]\\
&\quad +\sum_{j=N-1}^{N} x(t_{j-1})[S(t_j)-S(t_{j-1})]\\
&\ \vdots\\
&=b(t_0)\,B(t_0)+x(t_0)\,S(t_0)+\sum_{j=1}^{N} b(t_{j-1})[B(t_j)-B(t_{j-1})]+\sum_{j=1}^{N} x(t_{j-1})[S(t_j)-S(t_{j-1})].
\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{Max}(t_1-t_0, \cdots, t_j-t_{j-1}, \cdots, t_N-t_{N-1})\to 0$

とすれば，

任意の $t \in [0, T]$ に対して，

$$B(t)\,b(t)+S(t)\,x(t)=B(0)\,b(0)+S(0)\,x(0)+\int_0^T b(\tau)\,dB(\tau)+\int_0^T x(\tau)\,dS(\tau)$$

すなわち

$$V(t)=V(0)+\int_0^t b(\tau)\,dB(\tau)+\int_0^t x(\tau)\,dS(\tau)$$

を得る．

他方，伊藤の公式より

$$dV(t)=d(B(t)b(t)+S(t)x(t))=b(t)\,dB(t)+x(t)\,dS(t)+B(t)\,db(t)$$
$$+S(t)\,dx(t)+dB(t)\,db(t)+dS(t)\,dx(t)$$

であるから，

$$B(t)\,db(t)+S(t)\,dx(t)+dB(t)\,db(t)+dS(t)\,dx(t)=0$$

が成立する．

以上より，

資金自己調達的取引戦略 $(b(t),\ x(t))\ (t\in[0,\ T])$

$\Longleftrightarrow\quad \forall t\in[0,\ T],\ \ V(t)=V(0)+\int_0^T b(\tau)\,dB(t)+\int_0^T x(t)\,dS(t)$

$\Longleftrightarrow\quad \forall t\in[0,\ T],\ \ dV(t)=b(t)\,dB(t)+x(t)\,dS(t)$

$\Longleftrightarrow\quad \forall t\in[0,\ T],\ \ B(t)\,db(t)+S(t)\,dx(t)+dB(t)\,db(t)+dS(t)\,dx(t)=0$

$\Longleftrightarrow$　取引戦略開始時点 0 で $B(0)b(0)+S(0)x(0)$ のコスト（初期投資費用）をかけてポートフォリオ $(b(0),\ x(0))$ を開設し，それ以降の取引期間の途中 $(0,\ T)$ においては，外部からの資金（配当）の流入も外部への資金（配当）の流出ても無いように，連続的にポートフォリオを組み替え，取引終了時点 $T$ でポートフォリオ $(b(T),\ x(T))$ を清算し現金化して，ネット・キャッシュ・フローを受け取る．

## 3　同値マルチンゲール測度

単位リスク当たりの超過収益を株式 $S$ のリスクの市場価格 $\lambda(t,\ \omega)$ とすれば，

$$\lambda(t,\ \omega)=\frac{\mu(t,\ \omega)-r(t)}{\sigma(t,\ \omega)}$$

は，１つの確率過程である．このリスクの市場価格 $\lambda(t,\ \omega)$ は，確率測度 $P$ の下で，ノビコフの条件（次に定義する $Z(t)$ がマルチンゲールであるための十分条件である（渡辺 [23]，命題 4.3，P. 110参照））

$$E^P\left[\exp\frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(t,\ \omega)\,dt\right]<\infty$$

を満たすものとする．このとき，確率過程

$$Z(t)=\exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau,\ \omega)\,dW(\tau)-\frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2(\tau,\ \omega)\,d\tau\right),\quad t\in[0,\ T]$$

は，マルチンゲールである．実際，伊藤の公式より，

$$dZ(t)=-\lambda(t,\ \omega)Z(t)\,dW(\tau),\quad t\in[0,\ T]$$
$$Z(0)=1$$

であるから

$$Z(t)=Z(0)-\int_0^t \lambda(\tau,\ \omega)Z(\tau)\,dW(\tau)$$

で，

$$\begin{aligned}E^P[Z(t)]&=Z(0)-E^P\left[\int_0^t \lambda(\tau,\ \omega)Z(\tau)\,dW(\tau)\right]\\&=Z(0)\\&=1\end{aligned}$$

となるから．

$Z(T)>0$ であるから，$F_T$ 上に $P$ と同値な新しい確率測度 $Q$ を，$Q$ の $P$ に関するラドン・ニコディム微分係数

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{F_T}=Z(T)$$

によって定義することができる．実際，

任意の事象 $A\in F_T$ に対して

$$Q(A)=\int_A Z(T)\,dP=E^P[1_A(\omega)Z(T)]\geqq 0$$

ここに，

$$1_A(\omega)=\begin{cases}1 & (\omega\in A)\\ 0 & (\omega\notin A).\end{cases}$$

$$\begin{aligned}Q(\Omega)=\int_\Omega Z(T)\,dP&=E^P[1_\Omega(\omega)Z(T)]\\&=E^P[Z(T)]\\&=E^P[Z(t)]\\&=1\end{aligned}$$

であるから，$Q$ は確かに1つの確率測度である．

ギルサノフの定理（Karatzas and Shreve [16], 5. 1. Theorem (Girsanov [8], Cameron and Martin [2]) p. 191）によって，確率過程

$$\widetilde{W}(t)\triangleq W(t)+\int_0^t \lambda(\tau,\ \omega)\,d\tau,\quad t\in[0,\ T]$$

は，$P$ と同値な確率測度 $Q$ の下で，標準ブラウン運動である．さらに，確率微分方程式は，

$$\begin{aligned}dS(t)&=\mu(t,\ \omega)S(t)\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)\,dW(t)\\&=r(t)S(t)\,dt-r(t)S(t)\,dt+\mu(t,\ \omega)S(t)\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)\,dW(t)\\&=r(t)S(t)\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)\left[dW(t)+\frac{\mu(t,\ \omega)-r(t)}{\sigma(t,\ \omega)}dt\right]\end{aligned}$$

と変形できるので，この確率微分方程式は，$P$ と同値な確率測度 $Q$ の下で新しい標準ブラウン運動 $\widetilde{W}(t)$ を用いて

$$dS(t)=r(t)S(t)\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)\,d\widetilde{W}(t)$$

と書き直すことができる（渡辺 [23], pp. 113-114）．

**命題 1**　$P$ と同値な確率測度 $Q$ の下で，安全証券 $B$ をニュメレールとする株式 $S$ の相対価格（割引価格）

$$\bar{S}(t) \triangleq S(t)B^{-1}(t), \quad t \in [0, T]$$

は，マルチンゲールである．

証明　伊藤の公式を適用すると

$$d\bar{S}(t) = \sigma(t, \omega)\bar{S}(t)\,d\tilde{W}(t)$$

であるから，

$$\bar{S}(t) = \bar{S}(s) + \int_s^t \sigma(\tau, \omega)\bar{S}(\tau)\,d\tilde{W}(\tau) \qquad (0 \leqq s \leqq t \leqq T).$$

よって

$$E^Q[\bar{S}(t) \mid F_s] = \bar{S}(s) + E^Q\left[\int_s^t \sigma(\tau, \omega)\bar{S}(\tau)\,d\tilde{W}(\tau) \mid F_s\right] = \bar{S}(s) \qquad (0 \leqq s \leqq t \leqq T).$$

よって，$P$ と同値な確率測度 $Q$ の下で，安全証券をニュメレールとする株式の相対価格 $\bar{S}(t)$ は，マルチンゲールである．　証了

このように，その確率測度の下で安全証券をニュメレールとする株式の相対価格 $S(t)$ はマルチンゲールとなるので，$P$ と同値なこの確率測度 $Q$ を同値マルチンゲール測度と呼ぶ．

$\bar{S}(\tau) = S(\tau)B^{-1}(\tau)$ であるから，

$$E^Q[S(t)B^{-1}(t) \mid F_s] = S(s)B^{-1}(s), \quad 0 \leqq s \leqq t \leqq T$$

あるいは，

$$E^Q[S(t) \mid F_s] = \exp\left(\int_s^t r(\tau)\,d\tau\right)S(s), \quad 0 \leqq s \leqq t \leqq T$$

が成立するが，これは，同値マルチンゲール測度 $Q$ の下で，$s$ 時点現在で株式を 1 株買う代わりにこの資金を安全証券で運用したとき将来時点 $t$ で受け取ることのできる元利合計と時点 $s$ で株式を 1 株買って時点 $t$ まで保有したときの将来株価の条件付期待値が等しくなることを示している．つまり，同値マルチンゲール測度 $Q$ の下では，リスクの異なる二つの証券，安全証券と危険証券とのそれぞれ将来の運用益の条件付期待値が等しくなるので，投資家は，同値マルチンゲール測度の下であたかもリスク中立的である（リスクの違いには全く無頓着であり専ら将来収益の条件付期待値の大きさのみに関心を払う）かのように振舞うと解釈できる．この意味で，同値マルチンゲール測度 $Q$ を，リスク中立的確率測度とも呼ぶ．

なお，

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E^Q[S(s+h) - S(s) \mid Fs] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{\left(\exp\left(\int_s^{s+h} r(\tau)\,d\tau\right) - 1\right)S(s)\right\}, \quad 0 \leqq s \leqq T$$

であるから

$$\frac{1}{S(s)}\frac{1}{ds}[E^Q[S(s) \mid F_s]] = r(s) \qquad (0 \leqq s \leqq T)$$

が成立する．すなわち，リスク中立的確率測度 $Q$ の下で，任意の時点 $s$ 現在における株式へ投資した 1 円当りの瞬間的条件付期待収益率は，安全証券の瞬間的利子率に等しくなる．このこと

は，確率測度 $Q$ をリスク中立的確率測度と呼ぶゆえんである．

## 4　無 裁 定 条 件

起こりうる経済的損失を蒙る可能性が全くなく，確実に収益をあげる取引機会があれば，これを裁定取引機会という．裁定取引機会が存在する限り，現行の取引量よりも一層大きい取引量を所望し，裁定利益にあずかろうとするであろう．だが，裁定利益を求めて人々が一斉に裁定取引に参加すれば，やがて各市場の諸価格は調整され，裁定取引機会は消滅するであろう．

裁定取引機会が消えて無くなったときに成立する資産の価格を無裁定価格という．

資金自己調達的ポートフォリオ $(b(t),\ x(t))\ (t\in[0,\ T])$ が裁定取引であるとは，

$$V(0)=B(0)b(0)+S(0)x(0)<0,\quad V(T)=B(T)b(T)+S(T)x(T)\geqq 0$$

あるいは，

$$V(0)=B(0)b(0)+S(0)x(0)\leqq 0,\quad V(T)=B(T)b(T)+S(T)x(T)>0$$

が成立することと定義しよう（Duffie [4], p. 102）．

このとき，次の命題が成立する．

**命題 2**　マルチンゲール測度 $Q$ の下で，資金自己調達的ポートフォリオ $(b(t),\ x(t))\ (t\in[0,\ T])$ は，無裁定である．

証明　ポートフォリオ $((b(t),\ x(t))\ (t\in[0,\ T])$ が資金自己調達的であるとする．$Q$ の下で，

$$\begin{aligned}dV(t)&=b(t)\,dB(t)+x(t)\,dS(t)\\&=b(t)r(t)B(t)\,dt+x(t)(r(t)S(t)\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)\,d\widetilde{W}(t))\\&=r(t)(B(t)b(t)+S(t)x(t))\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)x(t)\,d\widetilde{W}(t)\\&=r(t)V(t)\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)x(t)\,d\widetilde{W}(t)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}d(V(t)B^{-1}(t))&=dV(t)B^{-1}(t)-r(t)V(t)B^{-1}(t)\,dt\\&=r(t)V(t)B^{-1}(t)\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)B^{-1}(t)x(t)\,d\widetilde{W}(t)\\&\quad-r(t)V(t)B^{-1}(t)\,dt\\&=\sigma(t,\ \omega)S(t)B^{-1}(t)x(t)\,d\widetilde{W}(t).\end{aligned}$$

よって，

$$V(T)B^{-1}(T)=V(0)B^{-1}(0)+\int_0^T\sigma(\tau,\ \omega)S(\tau)B^{-1}(\tau)x(\tau)\,d\widetilde{W}(\tau).$$

よって，$Q$ の下で $V(t)B^{-1}(t)$ のマルチンゲール性

$$\begin{aligned}E^Q[V(T)B^{-1}(T)]&=V(0)B^{-1}(0)+E^Q\Big[\int_0^T\sigma(\tau,\ \omega)S(\tau)B^{-1}(\tau)x(\tau)\,d\widetilde{W}(\tau)\Big]\\&=V(0)B^{-1}(0),\end{aligned}$$

が成立する．

よって，

$$V(T) \geqq 0 \Rightarrow V(T)B^{-1}(T) \geqq 0 \Rightarrow V(0)B^{-1}(0) \geqq 0 \Rightarrow V(0) \geqq 0.$$

かつ

$$V(T) > 0 \Rightarrow V(T)B^{-1}(T) > 0 \Rightarrow V(0)B^{-1}(0) > 0 \Rightarrow V(0) > 0 \Rightarrow V(0) \geqq 0.$$

よって

$$\neg (V(0) < 0,\ V(T) \geqq 0)$$

かつ

$$\neg (V(0) \leqq 0,\ V(T) > 0)$$

である．よって，マルチンゲール測度 $Q$ の下で，資金自己調達的ポートフォリオ $((b(t), x(t))(t \in [0, T])$ は，無裁定である． 証了

## 5 複製ポートフォリオの構成

株式を対象（原資産）とする満期日 $T$ をもつヨーロッパ型派生証券 $D$ の時点 $t \in [0, T]$ の価格を $D(t)$ とする．このヨーロッパ型派生証券を時点0に保有したとすると，それ以降の途中期間 $(0, T)$ 中は，無配当で，満期日 $T$ においてのみ，成約時に取り決めた方式に従って，時点 $T$ の株価 $S(T)$ に依存してその大きさが定まる配当支払（ペイオフ）$H(S(T))$ を得る．したがって，リスクなしに確実に利益を得る裁定取引機会が無いという無裁定条件の下では，

$$D(T) = H(S(T))$$

が成立する．実際，仮りに $D(T) > H(S(T))$ なら，満期日 $T$ にこのヨーロッパ型派生証券 $D$ の配当支払い $H(S(T))$ を受け取るよりも，この派生証券を $D(T)$ で市場で売却することでリスクなしに確実に $D(T) - H(S(T))$ だけ余計に利益を得ることができ無裁定条件に反する．また，仮りに $D(T) < H(S(T))$ なら，満期日 $T$ に，この派生証券を $D(T)$ 支払って市場から購入し，直ちにその配当支払 $H(S(T))$ を受け取ることにより，リスクなしに確実に $H(S(T)) - D(T)$ だけ利益を得ることができ，無裁定条件に矛盾するからである．

株式を対象（原資産）とする満期日 $T$ をもつヨーロッパ型派生証券 $D$ の配当支払いのパターンと全取引期間 $[0, T]$ を通して全く同じ配当支払いパターンを持つポートフォリオを，安全証券と株式とによって構築できるであろうか．

一般に，市場のどの証券の配当パターンでも，これと全取引期間を通じて同一の配当パターンを，市場の他の諸証券を適当に組み合せたポートフォリオによって複製できるなら，市場は完備であるといい，そのポートフォリオをその証券の複製ポートフォリオという．

市場は完備であり，満期日前には配当支払いは無く満期日 $T$ においてのみ $H(S(T))$ の配当支払いを約束する，株式を対象とするヨーロッパ型派生証券 $D$ を，安全証券 $B$ と株式 $S$ とを適当に組み合せたポートフォリオを構成して複製できたとする．このとき，この派生証券に対する複製ポートフォリオは，取引終了日 $T$ の前の途中の期間 $(0, T)$ 中はいかなる配当もない資金自己調達的ポートフォリオでなければならないことは言うまでもなかろう．

そこで，資金自己調達的ポートフォリオ $(b(t), x(t))$，$t \in [0, T]$ が，株式 $S$ を対象とする

満期日 $T$ をもつヨーロッパ型派生証券 $D$ に対する複製ポートフォリオであるとは，満期日 $T$ において，

$$V(T)=H(S(T))$$

が成り立つこと，すなわち，満期日 $T$ において，

$$V(0)+\int_0^T b(\tau)\,dB(\tau)+\int_0^T x(t)\,dS(\tau)=D(T)$$

が成り立つことと定義しよう．

**命題 3**　資金自己調達的なポートフォリオで $D(T)=V(T)$ が成立するものが存在すれば，無裁定の条件の下で，任意の $t\in[0,\ T]$ に対して，派生証券の価格 $D(t)$ とこの派生証券の複製ポートフォリオの価値 $V(t)$ とは等しい．

証明　いまある時点 $t_0\in[0,\ T]$ で $D(t)\neq V(t)$ で，$D(t_0)<V(t_0)$ あるいは $D(t_0)>V(t_0)$ であったとする．

$D(t_0)<V(t_0)=B(t_0)b(t_0)+S(t_0)x(t_0)$ であるとしよう．時点 $t_0$ で派生証券を1単位買い，安全証券を $b(t_0)$ 単位売り（資金を $S(t_0)b(t_0)$ 円借り入れ），株式を $x(t_0)$ 単位空売り，それ以降 $(0,\ T)$ においては，資金自己調達的ルールでポートフォリオを連続的に組み替えていけば，この間配当の流出入は全くない．時点 $T$ でポジションを全て清算し，$D(T)-V(T)=0$ を得る．このような戦略を取ると時点 $t_0$ でリスクなしに確実にプラスの収益 $V(t_0)-D(t_0)$ を得，しかもその後一切損得なしという裁定取引が存在することになり，無裁定条件に矛盾する．

$D(t_0)>V(t_0)=B(t_0)b(t_0)+S(t_0)x(t_0)$ であるとすれば，時点 $t_0$ で派生証券を1単位空売りし，安全証券を $b(t_0)$ 単位買い（資金を $B(t_0)b(t_0)$ 貸付け），株式を $x(t_0)$ 単位買えば，時点 $t_0$ でリスクなしに確実にプラスの収益 $D(t_0)-V(t_0)$ を得，しかもその後は一切の損得なしという裁定取引機会があることになり，裁定取引が存在しないという条件に矛盾する．　証了

この命題は，無裁定条件の下で，派生証券の各時点 $t\in[0,\ T]$ の価格 $D(t)$ をどのように決めるべきかを示している．時点 $t$ においては，安全証券 $B$ の時点 $t$ の価格 $B(t)$ と株式 $S$ の時点 $t$ の株価 $S(t)$ は，既知であるから，時点 $t$ の複製ポートフォリオ $(b(t),\ x(t))$ の構成法（次節において示す）さえ分かれば，

$$D(t)=B(t)b(t)+S(t)x(t) \qquad t\in[0,\ T]$$

として，派生証券 $D$ の価格付け（プライシング）を行えばよい．

## 6　派生証券の無裁定価格

市場が完備のとき，無裁定条件の下で，派生証券のペイオフを複製する資金自己調達的ポートフォリオを構成でき，任意の時点 $t\in[0,\ T]$ において，この複製ポートフォリオの価値 $V(t)$ と派生証券の価格 $D(t)$ は等しい（命題3）．

いま，$D(t)$ したがってまた $V(t)$ が，株式の株価 $S(t)$ と時点 $t$ に依存し，任意 $t\in[0,\ T]$ において，

$V(t)=V(S(t),\ t)$

は，$(0,\ \infty)\times[0,\ T)$ の上で2回連続微分可能と仮定する．伊藤の公式を適用して，

$$dV(t)=V_S(S(t),\ t)\,dS(t)+V_t(S(t),\ t)\,dt+\frac{1}{2}V_{SS}(S(t),\ t)\,(dS(t))^2$$
$$=V_S(S(t),\ t)\,(\mu(t,\ \omega)S(t)\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)\,dW(t))+V_t(S(t),\ t)\,dt$$
$$+\frac{1}{2}V_{SS}(S(t),\ t)\,\sigma^2(t,\ \omega)S^2(t)\,dt$$
$$=(\mu(t,\ \omega)S(t)V_S(S(t),\ t)+V_t(S(t),\ t)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,\ \omega)S^2(t)V_{SS}(S(t),\ t))\,dt$$
$$+\sigma(t,\ \omega)S(t)V_S(S(t),\ t)\,dW(t).$$

他方，ポートフォリオ $(b(t),\ x(t))$ は資金自己調達的な複製ポートフォリオであるから，

$$dV(t)=b(t)\,dB(t)+x(t)\,dS(t).$$
$$=b(t)r(t)B(t)\,dt+x(t)\,(\mu(t,\ \omega)S(t)\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)\,dW(t))$$
$$=(b(t)r(t)B(t)+x(t)\mu(t,\ \omega)S(t))\,dt+x(t)\sigma(t,\ \omega)S(t)\,dW(t).$$

よって，伊藤過程の分解の一意性より

$$\sigma(t,\ \omega)S(t)V_S(S(t),\ t)=x(t)\sigma(t,\ \omega)S(t),$$
$$\mu(t,\ \omega)S(t)V_S(S(t),\ t)+V_t(S(t),\ t)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,\ \omega)S^2(t)V_{SS}(S(t),\ t)$$
$$=b(t)r(t)B(t)+x(t)\mu(t,\ \omega)S(t).$$

よって，複製ポートフォリオを構成するために用いる株式数（ヘッジ比）を，

$$x(t)=V_S(S(t),\ t):,$$

とすれば，

$$V(S(t),\ t)=b(t)B(t)+V_S(S(t),\ t)S(t)$$

より，複製ポートフォリオを構成するために用いる安全証券の枚数は

$$b(t)=\frac{1}{B(t)}[V(S(t),\ t)-V_S(S(t),\ t)S(t)]$$

となる．したがって，

$$\mu(t,\ \omega)S(t)V_S(S(t),\ t)+V_t(S(t),\ t)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,\ \omega)S^2(t)V_{SS}(S(t),\ t)$$
$$=r(t)V(S(t),\ t)-r(t)V_S(S(t),\ t)S(t)+V_S(S(t),\ t)\mu(t,\ \omega)S(t).$$

すなわち，$V(S(t),\ t)$ は，放物型の偏微分方程式

$$V_t(S(t),\ t)+r(t)S(t)V_S(S(t),\ t)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,\ \omega)S^2(t)V_{SS}(S(t),\ t)$$
$$=r(t)V(S(t),\ t)$$

を満たす．

このとき，次の命題が成立する．

**命題 4**　放物型偏微分方程式

$$V_t(S(t),\ t)+r(t)S(t)V_S(S(t),\ t)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,\ \omega)S^2(t)V_{SS}(S(t),\ t)$$
$$=r(t)V(S(t),\ t),$$

とその境界条件

$$V(S(T),\ T)=H(S(T))$$

を満たす解 $V(S(t),\ t)$ が存在すれば，その解は，確率的表現（確率解）

$$V(S(t),\ t)=E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(\tau)\,d\tau\right)H(S(T))\right],$$

によって与えられる．ここに，$S(t)$ は，同値マルチンゲール測度 $Q$ の下での標準ブラウン運動 $\tilde{W}(t)$ を用いて表わされる擬似株価過程

$$dS(t)=r(t)S(t)\,dt+\sigma(t,\ \omega)S(t)\,d\tilde{W}(t),$$

$S(t)=S_t$: 時点 $t$ においては既知の値,

を満たす．

証明

$$Y(\tau)\triangleq\exp\left(-\int_t^\tau r(s)\,ds\right)V(\tau,\ S(\tau))$$

に，伊藤の公式を適用すると

$$dY(\tau)=-r(\tau)\exp\left(-\int_t^\tau r(s)\,ds\right)V(\tau,\ S(\tau))\,d\tau+\exp\left(-\int_t^\tau r(s)\,ds\right)(V_\tau(\tau,\ S(\tau))\,d\tau$$
$$+V_S(\tau,\ S(\tau))\,dS(\tau)+\frac{1}{2}V_{SS}(\tau,\ S(\tau))(dS(\tau))^2)$$
$$=\exp\left(-\int_t^\tau r(s)\,ds\right)[-r(\tau)V(\tau,\ S(\tau))+V_\tau(\tau,\ S(\tau))+V_S(\tau,\ S(\tau))r(\tau)S(\tau)$$
$$+\frac{1}{2}V_{SS}(\tau,\ S(\tau))\sigma^2(\tau,\ \omega)S^2(\tau)]\,d\tau$$
$$+\exp(-\int_t^\tau r(s)\,ds)V_S(\tau,\ S(\tau))\sigma(\tau,\ \omega)S(\tau)\,d\tilde{W}(\tau)$$

$V(S(\tau),\ \tau)$ は上記の偏微分方程式を満たすから

$$=\exp\left(-\int_t^\tau r(s)\,ds\right)V_S(\tau,\ S(\tau))\sigma(\tau,\ \omega)S(\tau)\,d\tilde{W}(\tau).$$

よって

$$Y(T)=Y(t)+\int_t^T\exp\left(-\int_t^\tau r(s)\,ds\right)V_S(\tau,\ S(\tau))\sigma(\tau,\ \omega)S(\tau)\,d\tilde{W}(\tau).$$

よって，同値マルチンゲール測度 $Q$ の下で擬似株価過程が時点 $t$ 現在の初期条件

$S(t)=S_t$: 時点 $t$ 現在において既知

を満たすという条件付の期待値を両辺にとれば,

$$E^Q[Y(T)\,|\,F_t]=Y(t)+E^Q\left[\int_t^T\exp\left(-\int_t^\tau r(s)\,ds\right)V_S(\tau,\ S(\tau))\sigma(\tau,\ \omega)S(\tau)\,d\tilde{W}\,|\,F_t\right]$$
$$=Y(t).$$

よって

$$V(S(t),\ t)=E^{Q}\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)V(S(T),\ T)\,|\,F_t\right]$$

境界条件 $V(S(T),\ T)=H(S(T))$ より

$$=E^{Q}\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)H(S(T))\,|\,F_t\right]$$

証了

この命題は，市場が完備で，無裁定なら，同値マルチンゲール測度 $Q$ の下で，安全証券をニュメレールとする株式派生証券の相対価格過程 $\bar{D}(t)=D(t)\mathrm{B}^{-1}(t)$ は，マルチンゲールであること，すなわち

$$D(t)B^{-1}(t)=E^{Q}[D(T)B^{-1}(T)\,|\,F_t]$$

が成り立つことを，示している．よってこの命題と先の命題1を統合して，次の命題を得る．

**命題5**　市場が完備で無裁定機会が無いならば，安全証券をニュメレールとする株式と株式派生証券のそれぞれの相対価格 $S(t)\mathrm{B}^{-1}(t)$，$D(t)\mathrm{B}^{-1}(t)$ は，同値マルチンゲール測度 $Q$ の下で，マルチンゲールとなり，

$$S(t)B^{-1}(t)=E^{Q}[S(\tau)B^{-1}(\tau)\,|\,F_t],\quad 0\leqq t\leqq \tau\leqq T$$

$$D(t)B^{-1}(t)=E^{Q}[H(S(T))B^{-1}(T)\,|\,F_t],\quad 0\leqq t\leqq T$$

が成り立つ．

最後に，この命題5を適用して，各種のヨーロッパ型派生証券の現在価格を求めておく．権利行使価格 $K$ をもつヨーロッパ型株式コールオプションの満期日 $T$ のペイ・オフ $H(S(T))$ は，

$$H(S(T))=\mathrm{Max}[S(T)-K,\ 0]$$

であるから，このオプションの時点 $t$ の価格 $C(t)$ は，

$$C(T)=B(t)E^{Q}[B^{-1}(T)\mathrm{Max}[S(T)-K,\ 0]\,|\,F_t]$$

$$=E^{Q}\left[\exp\left(-\int_t^T r(\tau)\,d\tau\right)\mathrm{Max}(S(T)-K,\ 0)\,|\,F_t\right]$$

である．また権利行使価格 $K$ をもつヨーロッパ型株式プット・オプションの満期日 $T$ のペイ・オフ $H(S(T))$ は，

$$H(S(T))=\mathrm{Max}[K-S(T),\ 0]$$

であるから，このオプションの時点 $t$ の価格 $P(t)$ は，

$$P(t)=B(t)E^{Q}[B^{-1}(T)\mathrm{Max}[K-S(T),\ 0]\,|\,F_t]$$

$$=E^{Q}\left[\exp\left(-\int_t^T r(\tau)\,d\tau\right)\mathrm{Max}(K-S(T),\ 0)\,|\,F_t\right]$$

である．さらに，現物株の受渡価格 $K$ をもつ先渡契約の受渡時点 $T$ のペイ・オフ $H(S(T))$ は，

$$H(S(T))=S(T)-K$$

であり，契約時点 $t\in[0,\ T]$ の先渡契約の価値 $F(0)$ はゼロであるから，

$$0=E^Q[B^{-1}(T)(S(T)-K)|F_t]=E^Q[B^{-1}(T)S(T)|F_t]-B^{-1}(T)K$$

$B^{-1}(t)S(t)$ のマルチンゲール性により

$$=B^{-1}(t)S(t)-B^{-1}(T)K.$$

よって，契約時点 $t\in[0,\ T]$ の先渡価格 $K(t)$ は，

$$K(t)=B(T)B^{-1}(t)S(t)=S(t)\exp\left(\int_t^T r(\tau)\,d\tau\right)$$

である．

## 参 考 文 献


[1] Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 81: 637-654, 1973.

[2] Cameron, R. H. and W. T. Martin, "Transformation of Wiener Integrales under a General Class of Linear Transformations". *Transactions of the American Mathematical Society*, 58: 184-219, 1945.

[3] ——, "Transformation of Wiener Integrals by Nonlinear Transformations". *Transactions of the American Mathematical Society*, 66: 253-283, 1949.

[4] Duffie, D. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, 2nd ed., 1996.（山崎 昭・桑名陽一・大橋和彦・本多俊毅訳『資産価格の理論 株式・債券・デリバティブのプライシング』創文社，1998年）

[5] Elliott, R. J. and P. E. Kopp. *Mathematics of Financial Markets*, Springer-Verlag, 1999.

[6] Feynman, R. P., "Space-Time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics". *Review of Modern Physics*, 20: 367-387, 1948.

[7] 舟木直久『確率微分方程式』岩波書店，1997年.

[8] Girsanov, I. V., "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures". *Theory of Probability and Applications*, 5: 285-301, 1960.

[9] Harrison, J. M. and D. Kreps., "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets". *Journal of Economic Theory*, 20: 381-408, 1979.

[10] —— and S. Pliska, "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading". *Stochastic Processes and their Applications*, 11: 215-260, 1981.

[11] ——, "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading : Complete Markets". *Stochastic Processes and their Applications*, 15 : 313-316, 1983.

[12] Itô, K., "On a Formula Concerning Stochastic Differentials", *Nagoya Mathematical Journal*, 3: 55-65, 1951.

[13] 伊藤 清『確率論』岩波書店，1991年.

[14] Jarrow, R. and S. Turnbull, *Derivative Securities*, South-Western College Publishing. 1996.

[15] Kac, M., "On Distributions of Certain Wiener Functionals", *Transactions of the American Mathematical Society*, 65: 1-13, 1949.

[16] Karatzas, I. and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, 2nd ed., 1991.

[17] ——, *Methods of Mathematical Finance*. Springer-Verlag, 1998.

[18] 刈屋武昭『金融工学の基礎』東洋経済，1997年.

[19] 楠岡成雄『確率と確率過程』岩波書店，1993年.

[20] Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4: 141-183, 1973. Republished with revisions as Chapter 8 in R. C. Merton. *Continuous-Time Finance*. Basil Blackwell, Oxford, 1991.

[21] 長井英生『確率微分方程式』共立出版, 1999年.
[22] Pliska, S. R. *Introduction to Mathematical Finance*, Discrete Time Models. Blackwell, 1997.
[23] 渡辺信三『確率微分方程式』産業図書, 1975年.