Lucas の "Expectations and the Neutrality of Money" の再検討と批判的注解※

—— 1つの覚書 ——

An Examination and Critical Note on Lucas's "Expectations and the Neutrality of Money"

芳賀半次郎・板垣有記輔
Hanjiro HAGA・Yukio ITAGAKI

1. はじめに

ルーカスの標記論文については，すでに，内外において多くの人びとによって論ぜられ，ルーカス自身によっても自分の論文の一部の，しかし，かなり重要な部分の誤りが表明されており，例えば，証明のある部分は "invalid" で，また，他の部分は "incorrect" であるとはっきり記しているのである[1]．最近は岩田によっても数学的検討が加えられ，考究が一層深められるに至った[2]．

このように，ルーカスのこの古典的論文については多く語られ，しかも当のアメリカにおいてさえ，この学派への関心はピークを越しつつある折，さらに，これ以上論ずる必要がないように思われる．

しかし，そもそもこの論文は，単に純粋に理論経済学の世界の議論にとどまることなく，裁量的経済政策，いな経済政策一般の非有効性と有効性をめぐっての激しい論争へと導いて行ったものなのである．そして，事実ルーカスの論文自体，そのような論争を惹き起こす論点を持っていたのである．この論文によってルーカスはミュースを発展させいわゆる合理的予想学派を形成し，経済政策の非有効性の論者の理論的支柱となったことは周知のことである．われわれは，経済政策の非有効性の立場をとるものでは決してないが，われわれが，あえて，この度ルーカスのこの論文を取り上げるのは，彼の論文をまずできるだけ忠実に理解することに努めるとともに，そのモデルのもつ問題性を合わせて指摘し，経済政策の合理的予想学派の言うところ

※) 本論文を作成するに当たり，石巻専修大学の岩田恒一教授，東北大学経済学部の大槻幹郎，細谷雄三，佃良彦，池田昌幸，大西匡光の諸教授また，大学院情報科学研究科の鈴木篤教授，および創価大学経済学部の池田貞雄教授，東京国際大学二階堂副包教授，学習院大学小山昭雄教授に，多大の御教示をいただいた．記して感謝の意を表したい．言うまでもなく，一切の責任は芳賀・板垣のものである．

1) Lucas [21] p.197.

2) 岩田 [11], [12].

のいわゆる非有効性をこの論文を通して内在的に批判することにあったのである.そして多面,従来の考察は伝統的な経済学的思考の枠組への架橋についての考慮が余り払われていず，そのために経済学者の理解を困難にした面もあった．われわれは，正統的一般均衡理論への架橋を試みるつもりである．そしてその架橋がどの程度可能か，さらに進んで，ルーカル理論はどのように従来の一般均衡理論と異なっているかについても触れるつもりである．また，ルーカス自身はもちろん，この論文を考察した他の経済者によっても高度の数学的展開が試みられているのであるが，例えば，ルーカスによって“a plausible conjecture”であるとされ，しかも，彼の体系の均衡解の存在とその一義性の証明において極めて重要な役割を演じていた「均衡価格関数（the equilibrium price function)」についてもあまり経済学的な説明がなされていたとは思えない．そして，とくに強調しておきたいことは，ルーカスは，均衡価格と均衡実質生産量との関係が現代景気循環（the modern business cycle）の中心的特徴であると指摘しつつ，あの周知のフィリップス曲線の別な形と彼が称している「名目的な価格変化率と実質生産量との関係」を明らかにするのが論文の目的であると彼の論文の冒頭で述べていることである．そして，彼のいわゆる別な形のフィリップス曲線を，統計の事後的データより抽出するのではなく，彼自身の均衡理論のモデルから内在的に示すのが彼の本来の意図だったのである．

ルーカスが別な形のフィリップ曲線と言っているのは，通常フィリップ曲線というときは，賃金率の変化率ないし価格の変化率と失業率の関係としてとらえているのであるが[1]，ルーカスは価格の変化率とGNPの関係を考え，その関係を彼はフィリップス曲線に対応させているから別な形のフィリップス曲線と呼んでいるのである．

このような呼び方は，オーカンの法則すなわち観察されたGNPと失業率と間の平均的関連性が負の相関を示すというあの法則からしても許されるであろう[2]．

ところで，ルーカスの論文が公刊され，そして喧伝されてから10年ないし20年以上も経過し，その論文の論理構造だけでなく政策的・政治的含意も論じ尽くされたと考えられるかも知れないが，わが国においては，彼の論文自体が難解であることからして，少なくとも初めて読む者にとっては理解が困難で，したがって，合理的予想学派の主張する反ケインズ経済学的な「裁量的経済政策の非有効性」に対する批判も超越的になり説得性に欠くきらいがあった．以下のわれわれの論考は，以上の欠点を意識してなされたものであるが，あくまで，われわれ自身の研究の1つの整理としての覚書と言ってよい．

彼の均衡モデルは，あらゆる形の「貨幣錯覚」が厳密に排除されている．そして，例えば，

1）Phillips, A. W. [30] pp.283～299参照．Phillipsは賃金率の変化率で考察し，フリードマンは価格の変化率で考えている．

2）これは，オーカンの法則についての単純化された説明といわなければならない．実は，オーカンの論文は潜在実質GNPという概念を中心にして技術的知識，自然資源や労働生産性の問題を念頭において，ある特定の期間について推定結果を出したソフィスティケートされたものであるが，オーカンの法則として本文のような命題が言われるようになったのである．通常言及されているオーカンの論文は，OKun [26] あるいは [27] であるが，前者の方が基本的なものである．

すべての価格は結局において需給を均衡たらしめる価格であり，またすべての経済主体は問題になっている経済諸量についてのある予想の下で目的関数の最適化行為を行うのである．この場合，ヤングの経済主体の目的関数はヤングのときの当面のデターミニスティックな効用とヤングが将来オールドになったとき消費することからくる期待効用の和であり，ヤングの各主体はそれを最大にしようとするのである．この期待効用については後述するが，さし当たって簡単に言及しておくならば，つぎのようなものである．すなわち，ヤングは労働して作った生産物を消費し残りを貨幣形態で貯蓄し自分のオールド時に備える．しかし，貯蓄された貨幣は一旦貨幣当局に預けられ翌期オールドになるとき確率的な比例倍だけ返ってくるというランダムなものである．すなわち翌期の貨幣量は貨幣的な攪乱要因の影響下にあるのである．しかし，われわれはこのようなルーカスの貨幣について疑問を抱かざるを得ない．すなわち，現実の貨幣はルーカスが与えた以外の多くの機能を持ち，それらの機能のためにも使用されているのであるが，ルーカスは貨幣のこれらの性質を捨象しているのである．この問題点を指摘しつつ，ルーカスにしたがって先に進もう．すなわち，ルーカスにおいては，翌期の消費財の価格も確率的なものである．したがって，実質的に消費される将来実質消費財の量も確率的なものである．しかし，幸いにも予想される貨幣的攪乱要因のそれぞれの大きさの確率密度ないし分布が分かっており，将来消費財について予想されるそれぞれの価格についてもそれぞれの確率密度ないし分布が分かっている．それに基づいて期待効用値がすなわち効用の確率的な平均値が形成されるのである．そして，このような確率的な将来効用の期待値と前述のデターミニスティックな現在効用との和をヤングの主体は最大にするのである．

ルーカスが彼のこの「予想と貨幣の中立性」という題の論文で，“現代景気循環の中心的特徴”として挙げているのは名目価格の変化率と実質的産出量との間の系統だった関係であり，循環という言葉で連想する例のサイクルではないのである．予想の経済理論への導入についてはケインズやヒックスを直ちに想起するのであるが，外挿的予想や適応的予想仮説を採り入れた別個の経済学者は，「くもの巣モデル」を用いこれらの予想仮説により価格と産出量の循環的変動まさしく例のサイクル的変化を示そうとしたのである．しかし，合理的予想学派のルーカスは，価格と産出量間のこのような意味でのサイクルを考察しようとしたのではない．フィリップスをまつまでもなく，インフレーションと失業ないし産出量との関係は古くから経済学者の関心事であったのであり，とくに1970年代初頭の停滞とインフレーションの共存といういわゆるスタグフレーションの発生と相まって，ケインズ派経済学者に対し，彼らの経済学の政策的非有効性を主張する学問的流派が注目をあびるに至った．マネタリズムそして合理的予想学派がそれである．ルーカスが価格と産出量との間の関係を現代景気循環の中心的特徴と言ったのは，そのような学界の状況を背景にしてであったのである．われわれは，合理的期待（形成）ないし合理的期待（形成）学派と呼ばず合理的予想ないし合理的予想学派と言うのは，本来“expectation”は，自分達にとって将来の局面が良い場合も悪い場合も用いる言葉であるから，中立的意味をもつ「予想」の語を使用することを断っておく．

ルーカスの合理的予想は，ミュースのそれと深くかかわっている[1]．すなわち，ルーカスはミュースに言及しながら「合理的予想」という言葉は経済モデルについての整合的公準に関係しており，合理的予想というものは特定のモデルとの関係においてのみ正確な意味をもつのであるとしている．そして，ルーカスはさらにモデルから無関係に「合理的予想」を定義して議論することは無内容であるか馬鹿げたものの何れかになると言っているのである[2]．

では，ルーカスが「合理的予想」と言うとき，それはモデルとは切り離しては考えることができないというその彼のモデルとは何であるかは，本論全体が示すことになるのであるが，モデルとは切り離せないというその予想が，彼の理論モデルにどう組み込まれているか例を挙げてヒューリスティックな意味でその一部だけを簡単にスケッチしてみよう．

ヤングが，期初においてオールドになって消費するときのため持ち越そうとするヤング一人当たりの貨幣の需要額λは，そのとき共存しているオールドがヤング一人当たりに供給する貨幣量に貨幣の需給均衡においては等しいのである．実はこの一人当たり貨幣量は後に詳述することによって明らかになるのであるが$\frac{mx}{\theta}$であり，xは貨幣的確率変数でθは実物的確率変数である．mはオールドが保有していた貨幣量であるが実際にオールドが受け取るのはランダムな確率変数xで一定倍されたmxなのである．$x>1$のときは政府の拡張政策によって入手する貨幣が増えると考えることもできようし，例えば年金給付の増加と考えてもよいであろう．反対に，$x<1$のときは政府の緊縮政策によって入手する貨幣が減ると考えることもできるであろうし，例えば，年金給付の切下げという事態と考えてもよいであろう．確率変数xおよびθの確率密度関数ないし分布関数も分かっているのであるが，一人当たりの貨幣の需給均衡条件$\lambda=\frac{mx}{\theta}$において$\lambda$は均衡体系の均衡値として定まってくるのである．一人当たりの貨幣の需給の均衡はおのずと貨幣市場の全体の均衡を意味する．また，このλは以下の意味も持っている．

他方，ヤング自身がオールドになって消費するために持ち越す上述の貨幣額λは，確率変数x'で定数倍され$x'\lambda$となって帰って来るのであり，この$x'\lambda$がオールド時に使用可能な貨幣量なのである．このx'は先のxに対応して同じ経済学的意味をもっている．しかし，このヤングがオールドになって消費できる財の量はこの名目的な貨幣量$x'\lambda$でなく確率変数である将来価格p'によって割られた$\frac{x'\lambda}{p'}$なのである．ところで，確率変数x'，p'の分布関数ないし密度関数は経済主体が利用し得るすべての情報を基にして形成する条件付分布関数ないし密度関数なのである．ルーカスがこの場合利用し得る情報と言っているのは現在の貨幣量mと現行の価格pなのである．したがって，mとpを前提とするx'とp'の条件付分布関数なのである．経済主体は，将来財の効用の確率的平均値すなわち期待値$\int v\left(\frac{x'\lambda}{p'}\right)dF(x',p'\mid m,p)$と後に説明する現在効用の和である目的関数を最大にするようにλを決めるのである．他方，λは均衡体系全体からも決まってくるのであり，貨幣の確率的需給均衡条件$\lambda=\frac{mx}{\theta}$を満たさなけ

1）Muth, J. F［25］pp.315-335参照.
2）Lucas［22］p.13，邦訳22ページ.

ればならないことは前述したとおりである．

いま述べたように，最適化行為の目的関数は確率的な期待効用を含むから主体的均衡条件は，例えば，現在の最適名目貨幣（支出）の限界効用と，将来の名目貨幣の限界期待効用とが等しく，また，最適実質貨幣（支出）の限界効用と将来の実質貨幣（支出）の限界期待効用とが等しいという確率的な体系における主体的均衡条件となるのである．そして，この主体的均衡は貨幣市場の客体的な確率的均衡条件をも成立させているのである．これは，ルーカス体系の一部を拾いあげたものであるが，彼の「予想」は全体のモデルの中で密接に結び合っているのである．予想が体系と不可分であるといういわゆる「合理的予想」の何たるかは，われわれの論文の展開にしたがって一層明らかになるであろうから，予備的紹介はこの程度にとどめることにする．ルーカスのモデルについては，後に紹介するが，彼が周知のフィリップ曲線の1つと言っている価格と産出量間の関係は，あらゆる形の貨幣錯覚が厳密に排除されているフレームワークの中で導かれたのであるとしている．ルーカスのこの「錯覚」についての言葉は後にまた觸れる．

貨幣錯覚についてはケインズ以前より取り上げられているが，たびたび言及されるようになったのはやはりケインズからであろう[1]．

ケインズは，雇用の増大にともない物価水準が騰貴して実質賃金が下落しても労働者は抵抗しないが，他の労働者に比して貨幣賃金が切り下げられることに対しては抵抗すると言っている．それは貨幣錯覚によるものと通常言われているが，ケインズによる上述のような労働者のビヘィビアは極めてありそうに思えるのであるがこのような労働者の態様はルーカスの合理的予想仮説によるモデルでは除かれているのである．ルーカスはこれを含めたすべての貨幣錯覚を除外すると述べていると考えられる．フリードマンは，短期のフィリップス曲線を貨幣の拡張政策による予想価格の変化率と実際の変化率との乖離から生ずる貨幣錯覚によって説明しているが，ルーカスはこのような貨幣錯覚をも排除しようとしているのである[2]．

では，ルーカスはあらゆる形の貨幣錯覚を排除すると言っているが，ルーカスのモデルには別な形の錯覚ないしそれに類似したイルージョンはないのであろうか．そのことについてはルーカスのモデルを説明するのに際し言及するつもりである．

ルーカス・モデルにおいては，交換は2つの物理的に分離された市場において，それぞれ別個に行われる．各期において経済主体の人口はこの2つの市場間で後述のような仕方で確率的に配分される．この確率的な人口の配分は，2つの市場間の相対価格を変動させるのであるが，孤立した市場いわゆる孤島間の取引は行われないので，この相対価格の変動によって何ら裁定取引は生じない[3]．

1）貨幣錯覚についての学説的紹介は，Eatwell, Milgate and Newman［4］pp.518-519参照．

2）Friedman.［5］p.227.

3）島というアイデアについては，Phelps［29］pp.1～23参照．とくにその中のpp.8-9の "Introduction: The New Microeconomics in Employment and Inflation Theory" 参照．

このような人口の確率的配分という第1の攪乱的要因に加えて第2の攪乱的要因として貨幣量の確率的変化がある．そして，この貨幣的確率的変化それ自身も名目的価格水準を変化させるのである．

ルーカスは人口を実物的要素としているが，それは経済の実物的側面を代表させていると解釈して良いであろう．そのような実物的攪乱および貨幣的攪乱の現在の状態についての情報は，経済主体がたまたま属している市場の価格を通してのみ経済主体に伝達されるのである．そして，価格の変動が，実物的要素すなわち相対的な需要の変化（人口の配分の変化）によるものか，名目的変化すなわち貨幣的変化によるものか，経済主体にとっては不分明であるから，価格は不完全にしか情報を伝えることはできないとルーカスは述べている．そして，上述のような不完全な情報に基づく経済行動は貨幣の非中立性という結果をもたらし，広く言えば，フィリップス曲線の現象が導かれるとルーカスは言っている．このルーカスの主張は重要であると付言しておこう．しかし，ここで価格水準は人口や貨幣の状態を不完全にしか示し得ないので雑音を含む信号（noisy signal）と言わざるを得ず，したがって，ルーカスのフィリップス曲線もやはり1つのイルージョン（錯覚）によるものと解することができるとゲールは言っている．ルーカスは情報の不完全さからくる「貨幣の非中立性」から例の形のフィリップス曲線が生ずるとし，他方，ゲールはフィリップス曲線もやはり一つの「錯覚」であると言っていることは，ルーカスがこの論文であらゆる形の「錯覚」を排除しているという言葉とともに，われわれは銘記しておくべきことである[1)]．ルーカスがこの論文でのフィリップス曲線について自分の考察に対する自負を思うとき，論文の表題が「予想と貨幣の非中立性」であってもおかしくはないのである．

しかし，ルーカスは，同時に，貨幣の長期的中立性すなわち実物的および名日的大きさからの独立に関する古典的結論はいぜんとして妥当すると言っている．ルーカスは，後述の定理2において，古典的意味における短期的な貨幣の中立性に言及しているが，ルーカス自身，貨幣の長期的中立性と短期的中立性をどのように区別しているか，はっきりしないが，ここではこれについて概略的説明をしている文献を紹介するに留めておこう[2)]．

ルーカスは，また自分のモデルから導かれた集計的経済の諸特徴はフリードマンによってアメリカ経済の特色とされている多くのものにかなり類似していると言っている[3)]．そして，標記の自分の論文におけるモデルは，それによってフリードマンの命題のいくつかが厳密に定式化され，かつそれが正当なものであることが示されている極めてエラボレートされた，しかも，最初の例であるとさえ述べているのである．それから，ルーカスはこの論文におけるアプローチは先にフェルプスによって試みられていると述べている[4)]．

1）Gale［7］p.68参照．
2）Patinkin, D.［28］pp.639-645. ルーカスの定理の2の箇所は，Lucas［18］pp.75-77.
3）ルーカスは，Friedman［6］pp.1-17を挙げている．
4）Phelps［29］pp.1-23.

そしてまた，「フェルプスはインフレーションと雇用についての新しい理論をすでに提示し，“あらゆる取引が完全な情報の下で行われるという前提を”置かないという点を除いては新古典派的枠組みの中で，フェルプスはフィリップ曲線を導いている」ともルーカスは述べているのである．この言葉から，ルーカスは，新古典派というのは完全情報を前提にしているものであると考えていることが分かる．そして，このフェルプス的方法がまさしくルーカスの論文で試みられているものであると記している．

さらに，ルーカスはこの論文で展開される主要な結論は，動的計画法の原理に密接に関連はしているけれども，それ自体独立して興味のある均衡の概念，しかも，新しい均衡の概念に基づくものであると言っている．そしてまた，均衡価格と均衡量は経済の状態空間で定義される「関数」として数学的にしかも有限次元のベクトルで特徴づけられるとしている．そして，この特徴づけは，情報と予想の関係についての従来とは違った取り扱いを可能にしており，そして，この取り扱いは今までの適応的予想仮説よりもいくつかの点で遙かに満足すべきものなのであると言っている．このようなより満足すべき予想仮説を，ルーカスは合理的予想（形成）仮説とは明言していないが，彼の念頭にはこの仮説があることは言うまでもない．

2．ルーカス・モデル

ルーカスのモデルは，その主要な点の多くをサミュエルソンの最も簡単な世代重複モデルによっている[1)]．各期に，N人だけの全く同一の個人が生まれる．そして，そのおのおのはヤングの世代とオールドの世代の2期間に亘って生存するのである．

したがって，ヤングの世代の全く同一の個人がN人とオールドの世代のやはり全く同一の個人N人計2N人の人口が各期共存している．もし共存している全人口2N人が全く同一世代の同一の個人であるならば，売る側の人びとだけとなるか，あるいは買う側の人びとだけとなり，そもそも市場なるものは成立しない．その点ルーカスはサミュエルソンの最も簡単な世代重複のモデルを採り入れることによって巧みにこの難点を回避している．しかし，このように難点を回避し得ても同一の個人からなる社会は，実際のマクロ的経済と余りにもかけ離れていると思える．これは，ルーカスの諸結論に限界を感じさせるものである[2)]．この点を指摘しつつ先に進もう．

すなわち，労働はヤングの世代のN人のみ行い，そして各ヤング一人がn単位だけ労働す

1）Samuelson [31].

2）Lucas [22] はp.107および邦訳111ページで「最も興味深い最近のマクロ経済学の発展は，インフレーションや景気循環のような集計的問題を『ミクロ経済学』理論のフレームワークの中に再結合したことであるといってよいと思う．仮にそのような発展が成功すれば，『マクロ経済学』という用語は使われなくなり『ミクロ』という修飾語も不要になる」と言っている．ルーカスのこの言葉は，アイデンティカルな個人からなる社会を想定すれば，固有なマクロ経済学は消滅してしまうことを意味している．われわれは，マクロ経済学をルーカスのように考えることには同意できない．

るとすれば，同じ n 単位の産出量を生み出す生産関数が仮定されている．このような生産関数は，投入労働と産出量の間に原点から出る線形の関係があれば考えることができる．そして，このヤングの一人によってヤングの世代において消費される量を c^0 とし，オールドの世代によって同時期に消費される総量をヤングの人口 N によって割られたものすなわちヤング一人によって支えられるオールドの消費量を c^1 とする．またオールドの人口も N であるから c^1 は現在のオールド一人当たりの消費量とも言える．そして産出物はたくわえられることはできず，それゆえ，つぎの期に持ち越すことはできない．したがって，任意の1つの期間における総生産・消費可能性は

$$c^0+c^1 \leqq n : c^0, c^1, n \geqq 0 \tag{1}$$

で示される．そして，(1)式は生産物の需要と供給の広義の均衡条件，等号であれば通常の均衡条件となる．また，n はヤングの効用の最大化行為によって決まってくるのであり，したがって，経済体系において実質生産量は十分変わり得るものである．

また，この経済には，政府の貨幣当局によって発行される不換紙幣（fiat money）がある．この貨幣は，ヤングの労働によって産出された生産物をオールドに売ることによってヤングが得るものであるが，ヤングのときにはヤング自身が保有するものでなく，ヤングにかわって貨幣当局が保管しているのである．そしてヤングがオールドになったときこの貨幣の一定倍数を引き渡すのである[1)]．しかし，この倍数は必ずしも1でなく1より大かあるいは小であり得る．ヤングがヤングの期初に立ってヤングとオールドの2期にわたっての効用最大の計画を行うときは，この一定倍数はあくまでランダムな確率変数で，オールドになって，初めて自分に引き渡される貨幣量が分かるのである．貨幣はこのような機能しか持っていず，また，どんな遺産も不可能と仮定されているからオールドが費やさなかった貨幣は，彼らの死後貨幣当局に返還される．このようなルーカスの貨幣についての経済学的限界は，既述のとおりである．

ルーカスは，費やさないこのような貨幣の存在のケースも考えているが，もし効用についての非飽和の仮定があれば，プラスの価格の際はあり得ないケースであろう．

他方，ヤングがオールドになるとき，その期初において2つの弧島と例えられる2つの市場の人口は，両市場のそれぞれの総貨幣供給量，したがって貨幣市場の均衡を仮定すれば総貨幣需要量が等しくなるように，再配分される．また，ヤングの人口 N は両市場にそれぞれ確率的に $\frac{\theta}{2}$，$1-\frac{\theta}{2}$ の比で分けられる[2)]．しかし，ヤングが最適計画を立てるときは，この人口の配分比は依然として確率的なものであり，現行の価格を通して間接的にだけ知り得るのであって，θ の値が既知となるのは，例えばヤングがヤングの期初の午前に計画するとすれば，

1）ルーカスは自分のモデルについて，明示的に本文のような説明をしているわけではないが，このようなわれわれの説明が最もすっきりしているように思う．

2）$\frac{\theta}{2}$，$1-\frac{\theta}{2}$ でなく任意の正の数 n について $\frac{\theta}{n}$，$1-\frac{\theta}{n}$ であっても良いのである．しかし，n＝2としたのは後述のように，1つの島のオールドの貨幣量が $\frac{Nmx}{2}$ であるから，その2に対応させて式の展開を簡単にしようとしたためである．

θはその後の午後になって始めて分かるのである．実際はヤングが計画するときそれぞれNの$\frac{\theta}{2}$および$1-\frac{\theta}{2}$に配分されているのであるが，ただθの値は計画後に既知となると解釈したほうがよいかもしれない．ところで，ルーカスはなぜコミュニケートしない2つの弧島という非現実的モデルを考えたのであろうか．経済理論は閉鎖体系をモデルとして設定することが良く見られることなのであるが，ルーカスの経済学的動機は，むしろ，孤島間の人口配分の大きさを確率変数θで表して実物的側面を代表させ，それと貨幣的確率変数xとの比が他の経済諸量とともに,均衡体系にいかなる役割を演ずるかを見ようとしたと考えることができる．

また，ヤングが最適計画を行う彼らの期初の時点において，現在オールドになっている主体がかつてヤングの時代にオールドのときに備えて貨幣として持ち越したオールド一人当たりの額mはすべての主体にとって分かっている．しかし，これが政府の操作によって移転支払となってオールドに手渡されるのはmxであり，そしてxは確率変数である．xが既知となるのはヤングの計画決定後なのである．あるいは，ヤングの期初には実際にオールドには政府の移転支払として貨幣が渡されているのであるが，mxのxはヤングには知らされていないと考えることもできよう．オールド一人当たりの貨幣量がmxであるから，1つの島のオールド全体では$\frac{Nmx}{2}$であり，これがヤングの生産物との交換のための貨幣の供給となるのである．仮定によって，島に例えられる2つの市場の貨幣供給量が等しいと仮定されているので，それぞれ$\frac{Nmx}{2}$であるが，一方の市場ではヤングの人口は$N\frac{\theta}{2}$であるから，ヤング一人当たりに向けられる貨幣量は$\frac{Nmx}{2}/N\frac{\theta}{2}=\frac{mx}{\theta}$であり，もう1つの市場では$\frac{Nmx}{2}/N(1-\frac{\theta}{2})=\frac{mx}{2-\theta}$である．

ところで，計画時点ですでに既知とされているオールド世代一人当たりのmはつぎのように考えるべきであろう．現在のオールドが1つの市場でヤングのとき，自分のオールドのときのために持ち越した貨幣額λをm_1とする．また，もう1つの島でやはり現在のオールドがヤングのとき自分のオールドのときのために持ち越した貨幣額をm_2としよう．そのとき，ルーカスは双方の島がそれぞれ一人当たりmという同じ値の貨幣額をもつように2つの市場の人口を再分配すると仮定している．そのときは自分が所有権を有する貨幣とともに市場間を移動するものとする．そして1つの市場のオールドの人口をN_1とすれば，他の市場の人口は$N-N_1$である．そのとき上述のような人口の配分は，例えばつぎのように行われる．すなわち，1つの市場の貨幣量の半分$\frac{N_1m_1}{2}$を人口とともにもう1つの市場に移す．そして代わりにこのもう1つの市場の貨幣量の半分$\frac{(N-N_1)m_2}{2}$を先の市場に人口とともに移す．そのとき，第1の市場の貨幣量は$N_1m_1-\frac{N_1m_1}{2}+\frac{(N-N_1)m_2}{2}$で，第2の市場の貨幣量は$(N-N_1)m_2-\frac{(N-N_1)m_2}{2}+\frac{N_1m_1}{2}$である[1)]．いうまでもなく，第1の市場の貨幣量と第2の市場の貨幣量は等しい．すなわち，この2つの市場のそれぞれの貨幣量はともに，$\frac{N_1m_1+(N-N_1)m_2}{2}$である．したがって，2つの市場全体の移転支払前の総貨幣量は$N_1m_1+(N-N_1)m_2$であるので2

1）Muench［24］pp.327-328をこのように定式化することができるのではなかろうか．

つの市場全体の一人当たりの貨幣量 $\frac{N_1m_1+(N-N_1)m_2}{N}$ が m なのである．計画時点で，すべての主体に既知とされている m とはこれであり，それ故，また2つの市場全体の貨幣量は Nm であり，2つの市場間の貨幣量は等しいから，それぞれ1つの島の貨幣量は $\frac{Nm}{2}$ である[1)]．そして，これが政府の移転支払の操作が加えられることによって $\frac{Nmx}{2}$ となる．しかし，この x は計画時点ではあくまで確率変数であり，既述のように計画が午前であるならば，午後になって始めて既知となるのである．

そして，前述のように1つの市場でヤングに向けられる貨幣量は，ヤング一人当たり $\frac{Nmx}{2}/N\frac{\theta}{2}=\frac{mx}{\theta}$ であり，もう1つの市場ではそれは，$\frac{Nmx}{2}/N(1-\frac{\theta}{2})=\frac{mx}{2-\theta}$ である．また，計画主体はプライス・テーカーであり，かつ価格 p は後に説明するが $p=p(m,x,\theta)$ であるので，前述のように x,θ は価格を通して顕示（reveal）されるのであり，あくまで計画の時点では，確率的なものなのである．価格は雑音を含む信号であるとゲールが言った意味もその辺にある．そして，x,θ に対応する次期の確率変数は x',θ' で示されるが，x と x′ および θ と θ' はそれぞれ独立で，x と x′ は十分大きい正の数 α について区間（$0,\alpha$］で定義されかつ同じ確率密度関数 $f(x)$，$f(x')$ をもち，他方 θ，θ' は十分小さい正数 ε について閉区間〔$\varepsilon,2-\varepsilon$〕で定義されかつ同じ確率密度関数 $g(\theta)$，$g(\theta')$ をもつ，すなわち，これらの確率変数はそれぞれ，i.i.d. である．さらに［$\varepsilon,2-\varepsilon$］において対称性，すなわち，$g(\theta)=g(2-\theta)$ が成り立っていると仮定する．そして，f および g は連続である[2)]．

そして，ルーカスはつぎのように要約している．すなわち，任意の期間における状態は3つの変数 m,x および θ によって完全に記述される．さらにまた，ある状態から別な状態への経済の動きは，経済における個人の決定から独立であり，例えば一人当たりの名目貨幣量の時間を通しての変化は

$$m'=mx \tag{2}$$

で与えられる．そして，経済の動きは，(2)および x と θ のそれぞれの密度関数 f および g によって与えられるとルーカスは述べている．

1）互いに孤立した2つの市場で両市場間にコミュニケーションがないのに，この m を既知とすることができるのは，以下のような理由による．すなわち，貨幣当局が両市場で共通であり，この当局が m を両市場のすべての主体に周知させるのである．ここでわれわれは，多くのマネタリストが，いわゆる k パーセント・ルールの大事な点は，毎期の貨幣増加率が一定であることより，その一定である条件を公衆に公表し周知させることであると言っていることを想起するのがよいであろう．

2）Muench［24］は p.328で，$g(\theta)$ の台（support）は［$\varepsilon,2-\varepsilon$］，$0<\varepsilon<1$ としている．すなわち，θ がこの閉区間以外のときは $g(\theta)=0$ であるとしている．そして，その理由は，縮小写像の定理を使うときの写像が $\theta\to0$ のとき有界でなくなるおそれがあるからとしている．また，Azariadis［2］は p.948で θ と x をそれぞれ区間〔A,B〕，〔a,b〕，$A>0$，$a>0$ および $B\leqq2$ に限っている．ルーカスはこのような仮定を設けていない．おそらく積分値が確定するように分布関数ないし密度関数を仮定するなどしてミュンヒが指摘する難点を避けているように思う．ミュンヒやアザリアディスの仮定だけが問題の解決法ではないであろうが，縮小写像との関連で数学的処理の簡便さを考えてミュンヒの仮定を用いることにする．

3．選好と需要関数

オールドの世代の人びとは，少ない消費よりもより多い消費のほうを選好する．すなわち，非飽和の選好をもっている．そして，貨幣保有自体はなんら効用をもっていないので，政府の移転によって増減される貨幣保有量を全額そのままオールドは供給し，ヤングの生産物との交換にだけ用いるのである．その意味でオールドはその時点で最適計画を改めて行わない．ところで，ヤングは以下に定式化するような仕方で最適計画を行う，ヤングはヤングのときの消費を c，ヤングのときの労働供給量を n，将来の消費を c' として労働の上限を一定値 $\bar{n}$ とする．したがって，$\bar{n}-n$ はレジャーとなる[1)]．

すべての計画主体は，以下の(3)として定式化される現在効用と期待効用の和を最大にするように計画する．すなわち，ヤングのときの効用とオールドのときの効用に分けて考察しているのであるが，ヤングの計画時点において，ヤング期またオールドの期のどの時点でもそれぞれの同じ期である限り，計画されている消費量が同じであるならば同一期においては同じ効用を生むと仮定されている．仮りに，同じ期の平均をとって考えているモデルであるとしても，平均が同じであるならば，その期の消費の流列がどんなに違っていても同じ効用であると仮定されていることになる．この点，このような効用についての仮定は，ヒックスの「週」(week)という短い期間と違いかなりきつい仮定となるであろう．この式を見ても分かるように，現在財と将来財は効用関数において分離されている．この(3)式の第２項は将来効用の期待値であるが，後でとくに言及する．

$$U(c,n)+E\{V(c')\} \tag{3}$$

現在財の効用関数 U は

$D_1=\{(n,c)\mid c\geq 0,\bar{n}\geq n\geq 0\}$ で定義され，将来財の効用関数 V は，$D_2=\{c'\mid c'\geq 0\}$ で定義され，ともに厳密に凹関数で C^2－級関数，そして，U は c について狭義の増加関数，n について狭義の減少関数，V は c' について狭義の増加関数で，c そして c' はともに下級財でないとする．したがって，

$$U_{cn}+U_{nn}<0,\ U_{cc}+U_{cn}<0 \tag{4}$$

である[2)]．

1）ルーカスはレジャーという言葉を用いているが，労働の上限を考えていず，あたかも，n は無限大になり得るように扱っている．Lacus [22] p.34では，n の上限 $\bar{n}$ を明示的に考えている．

2）岩田恒一 [11] 46ページ参照．ここで岩田は U のヘッセの行列が半負定値としているが，確かに U が C^2-級関数でヘッセの行列が U 上で負値定符号ならば U は厳密に凹である．しかし，逆に厳密に凹であることがヘッセの行列が負値定符号であることを意味しない．半負値定符号であるかもしれない．しかし，Bernstein and Toupin [３] は，U が厳密に凸で C^2 級関数であるならば，U の疎である部分集合上では例外はあり得るがほとんどいたるところで (with possible exceptions on a nowhere dense subset of U)，U は正値定符号であることを証明した．もち論，凸を凹に正値を負値に読みかえることができる．芳賀半次郎 [８] ９ページ参照．

また，さらに以下の仮定を設ける．すなわち，V は増加関数で C^2－級関数かつ厳密に凹である．他方 $V'(c')c'$ は c' の増加関数．そしてまた，$V'(c')c'$ の c' についての弾力性は，1より小さいある値よりも小さい，すなわち，

$$V''(c')c'+V'(c')>0 \tag{5}$$

$$\frac{c'V''(c')}{V'(c')} \leqq -a<0 \tag{6}$$

$$1>\frac{-c'V''(c')}{V'(c')} \geqq a \tag{6'}$$

である[1)].

この(6)の左辺はの絶対値ないし(6′)の真ん中は Arrow-Pratt の相対的リスク回避度と呼ばれ

1）$0<a<1$ なる a について

$$\frac{d\{V'(c')c'\}}{dc'} \Big/ \frac{V'(c')c'}{c'} = \frac{V''(c')c'}{V'(c')}+1 \leqq 1-a$$

そして，(5)から，(6)の最左辺は－1より大であること，それ故（6′）式が導かれる．

2）岩田恒一［11］46ページの（註2）を参照・ただし，U＋V は厳密に凹関数で C^2－級関数故，U＋V は半負値定符号．したがって，その条件付も半負定値定符号・したがって例外を除いて岩田の D は $D<0$ であることは，

$$D=\begin{vmatrix} U_{cc} & U_{cn} & 0 & -p \\ U_{nc} & U_{nn} & 0 & +p \\ 0 & 0 & V'' & -p' \\ -p & +p & -p' & 0 \end{vmatrix}$$

なる縁付行列式より直ちに導かれる．岩田［11］の46ページの（註2）を正確に定式化し，現在財の価格が現在財に対する需要および将来財に対する需要にどういう影響を与えるかを考察しよう．そのとき，制約条件は

$pc+p'c' \leqq pn,\ c \geqq 0, c' \geqq 0, \bar{n} \geqq n \geqq 0$

であり，つぎのラグランジュ関数 L について最大解を求める．

$L(c,n,c';\gamma,\nu,\rho,\mu)=U(c,n)+V(c')+\gamma c+\nu n+\delta c'+\rho(\bar{n}-n)+\mu(pn-pc-p'c');\gamma \geqq 0, \nu \geqq 0, \delta \geqq 0, \rho \geqq 0, \mu \geqq 0$

その最大解の必要十分条件は，

（α・i）　$L_c=U_c(c,n)+\gamma-p\mu=0$

（α・ii）　$L_n=U_n(c,n)+\nu-\rho+p\mu=0$

（α・iii）　$L_{c'}=V'(c')+\delta-p'\mu=0$

（α・iv）　$L_\gamma=c \geqq 0, \gamma \geqq 0, \gamma c=0$

（α・v）　$L_\nu=n \geqq 0, \nu \geqq 0, \nu n=0$

（α・vi）　$L_\delta=c' \geqq 0, \delta \geqq 0, \delta c'=0$

（α・vii）　$L_\rho=\bar{n}-n \geqq 0, \rho \geqq 0, \rho(\bar{n}-n)=0$

（α・viii）　$L_\mu=pn-pc-p'c' \geqq 0, \mu \geqq 0, \mu(pn-pc-p'c')=0$

そして，最適解 c,n,c' は内点であることが，われわれの経済学的仮定から言えるから $U_c-p\mu=0$, $U_n+\mu p=0$, $V'-\mu p'=0$, $pn-pc-p'c'=0$

$$U_{cc}\frac{\partial c}{\partial p}+U_{cn}\frac{\partial n}{\partial p}+0\cdot\frac{\partial c'}{\partial p}-p\frac{\partial \mu}{\partial p}=\mu$$

$$U_{nc}\frac{\partial c}{\partial p}+U_{nn}\frac{\partial n}{\partial p}+0\cdot\frac{\partial c'}{\partial p}+p\frac{\partial \mu}{\partial p}=\mu$$

$$0\cdot\frac{\partial c}{\partial p}+0\cdot\frac{\partial n}{\partial p}+V'\frac{\partial c'}{\partial p}-p'\frac{\partial \mu}{\partial p}=0$$

$$-p\frac{\partial c}{\partial p}+p\frac{\partial n}{\partial p}-p'\frac{\partial c'}{\partial p}+0\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial p}=c-n$$

ているものであるが，この式は後述の証明で重要な役割を演ずるのである．そしてルーカス[22]はp. 26で1よりかなり大で20を越すことはないが，いくつかの標本は10をこしている，と言っている．

この(5)式は，将来財の価格の上昇は，他の事情が等しければ現在財の消費を増加させる[2)]．そして，このことは，所得効果が代替効果を決して圧倒しないことを意味している．また，分析の展開上以下の仮定をおく．

$$\lim_{c'\to 0} V'(c') = +\infty, \tag{7}$$

$$\lim_{c'\to \infty} V'(c') = 0, \tag{8}$$

将来財の消費量c'は，ヤングの主体がヤングのときは消費できないのであり，オールドになっ

$$\frac{\partial c'}{\partial p} = \frac{\begin{vmatrix} U_{cc} & U_{cn} & \mu & -p \\ U_{nc} & U_{nn} & \mu & p \\ 0 & 0 & 0 & p' \\ -p & p & c-n & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_{cc} & U_{cn} & 0 & -p \\ U_{nc} & U_{nn} & 0 & p \\ 0 & 0 & v' & -p' \\ -p & p & -p' & 0 \end{vmatrix}}$$

この分母をDとすれば，すでに述べたように，Uの疎である部分集合上では例外はあり得るがほとんどいたるところで（with possible exceptions on a nowhere dense subset of U）負である．さて，分子の符号について検討してみよう．若干の行列式の演算を試みて，

分子 $= (U_{cc}U_{nn}-U^2_{nc})(c-n)p' + (U_{cc}+U_{nc}+U_{cn}+U_{nn})p\,\mu\,p'$

さて，U関数が厳密に凹であることから，例外を除いてほとんどいたるところで，

$$\begin{vmatrix} U_{cc} & U_{cn} \\ U_{nc} & U_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

また，最適解は内点であることから，$c>0$．したがって$c-n<0$．

$(U_{cc}U_{nn}-U^2_{nc})(c-n)p'<0$.

また，$U_{cc}+U_{nc}+U_{cn}+U_{nn}$はLucas [18] p.69の(4)，すなわち芳賀・板垣本論文の11ページ(4)式より負．それ故，分子全体が負，かくして$\frac{\partial c'}{\partial p}>0$．このことは現在の価格が上昇すれば将来財の需要が増加する．当然pc'も増大する．このことは，現在財の価格が上昇すれば，次期に持ち越す貨幣$\lambda=pc'$も増加することを意味するのである．

他方，

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{\begin{vmatrix} \mu & U_{cn} & 0 & -p \\ -\mu & U_{cn} & 0 & p \\ 0 & 0 & v'' & -p' \\ c-n & n & -p' & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & U_{cn}+U_{nn} & 0 & 0 \\ -\mu & U_{nn} & 0 & p \\ 0 & 0 & v'' & -p' \\ c-n & n & -p' & 0 \end{vmatrix}}{D}$$

さて，$V' = \mu p'$より$p'V' = \mu p'^2$また$p(n-c) = p'c'$より$(c-n)pV'' = -p'c'V''$であるから，

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{-(U_{cn}+U_{nn})p'(V'+c'V'')}{D}$$

$U_{cn}+U_{nn}$はLucas [18] p.69および芳賀・板垣本論文の11ページの(4)より負，$V'+c'V''$はLucas同ページおよび芳賀・板垣の本論文12ページ(5)より正．したがって，上式の分子は正．他方Dは例外を除いてほとんどいたるところで負，それ故，$\frac{\partial c}{\partial p}<0$であり，現在財が下級財でないかぎり極めて自然である．

て始めて消費しようとする消費量なのであるが，そのときに貨幣と引換えにc'を購入するためにヤングの時点で貨幣としてλだけたくわえようとする．しかし既述のようにこのλはオールドになるや初めて，しかも，政府が比例係数である確率変数のx'倍だけオールドに引き渡すのである．したがって，オールドになって使用可能な確率的な名目貨幣量は$x'\lambda$であり，将来財の確率的な価格をp'とすれば，オールドのときに消費可能な実質的消費可能量は$\frac{x'\lambda}{p'}$である．したがって，ヤングの将来効用は，$V(\frac{x'\lambda}{p'})$ である．

しかし，x'もp'も確率変数であり，その両者の確率分布はmとpによって規定されているから，ヤングは(10)式の予算制約の下で現在効用と将来効用の期待値の和を最大にしようとする．すなわち，

$$\max \{U(c,n)+V(\frac{x'\lambda}{p'})dF(x',p'\mid m,p)\} \tag{9}$$

$$\text{subject to } p(n-c)-\lambda \geqq 0, \bar{n} \geqq n \tag{10}$$

ところで，分布関数$F(x',p'\mid m,p)$は目的関数

$$\Pi(n,c,\lambda) = U(c,n)+\int V(\frac{x'\lambda}{p'})dF(x',p'\mid m,p)$$

がC^1-級となるような性質をもつように与えられているとする[1)]．したがって，$V(c')$ が(7),(8)の性質をもっているケースにおいて，目的関数の第2項の積分値が確定値を持つように分布関数が仮定されているのである[2)]．

さて，目的関数Πの第1項$U(c,n)$ は定義域

$D_1 = \{(n,c) \mid 0 \leqq c, 0 \leqq n \leqq \bar{n}\}$で厳密に凹，第2項も$\lambda$の関数として

$D_2 = \{\lambda \mid \lambda \geqq 0\}$において厳密に凹，それ故$\Pi$は，

$D_3 = \{(n,c,\lambda) \mid (n,c) \in D_1, \lambda \in D_2\}$における2つの凹関数の和として

$D_3 = D_1 \times D_2$において凹関数である．したがって，われわれの問題は，

$p(n-c)-\lambda \geqq 0, c \geqq 0, \bar{n} \geqq n \geqq 0, \lambda \geqq 0$の制約の下で，$D_3$において定義される凹関数を最大にするという最適化問題となる．ところで，このような条件の下で，微分可能な場合におけるKuhn-Tuckerの定理は相補性の条件とともにつぎのようにして求められる[3)]．そして，以下の（a・4）～（a・8）のそれぞれの右端の等式はいわゆる相補性（complementarity）の条件である．

$$L(c,n,\lambda;\gamma,\nu,\delta,\rho,\mu) =$$
$$U(c,n)+\int V(\frac{x'\lambda}{p'})dF(x',p'\mid m,p)+\gamma c+\nu n+\delta\lambda+\rho\cdot(\bar{n}-n)+\mu\{p(n-c)-\lambda\} : \gamma \geqq 0,\ \nu \geqq 0,\ \delta \geqq 0,\ \rho \geqq 0,\ \mu \geqq 0$$

1）ルーカスが後で密度関数を用いているがここでは分布関数を用いている．1点に正の確率があるとき，すなわち，分布関数がジャンプしている場合はもち論，ジャンプをしていないときも密度で表せない特殊なケースもあり分布関数の方が適用範囲が広い．しかし，ルーカスは密度関数を用いた場合その問題点を明示していない．

2）例えば$V(c') = \sqrt{c'}$ のような将来効用関数の場合は，ガンマー分布関数を対応させて考えればよい．

3）Mangasarian［23］pp.92～112，邦訳90～110ページ．

(a・1) $L_c = U_c(c,n) + \gamma - p\mu = 0$

(a・2) $L_n = U_n(c,n) + \nu - \rho + p\mu = 0$

そして，微分と積分の順序変更が可能と仮定されているから[4)]，

(a・3) $L_\lambda = \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\displaystyle\int V\left(\frac{x'\lambda}{p'}\right)dF(x',p'\mid m,p) + \delta - \mu = \int V'\left(\frac{x'\lambda}{p'}\right)\frac{x'}{p'}dF(x',p'\mid m,p) + \delta - \mu = 0$

(a・4) $L_\gamma = c \geqq 0,\ \ \gamma \geqq 0,\ \ \gamma c = 0$

(a・5) $L_\nu = n \geqq 0,\ \ \nu \geqq 0,\ \ \nu n = 0$

(a・6) $L_\delta = \lambda \geqq 0,\ \ \delta \geqq 0,\ \ \delta\lambda = 0$

(a・7) $L_\rho = \bar{n} - n \geqq 0,\ \ \rho \geqq 0,\ \ \rho(\bar{n} - n) = 0$

(a・8) $\{p(n-c) - \lambda\} \geqq 0,\ \ \mu \geqq 0,\ \ \mu\{p(n-c) - \lambda\} = 0$

かくして，(a・1) ～ (a・8) より[5)]，

$U_c(c,n) - p\mu \leqq 0$, $c > 0$ならば等号 (11)

$U_n(c,n) + p\mu \leqq 0 \ \ \Leftarrow 0 = n < \bar{n}$ (12の1)

$U_n(c,n) + p\mu = 0 \ \ \Leftarrow 0 < n < \bar{n}$ (12の2)

$U_n(c,n) + p\mu \leqq 0 \ \ \Leftarrow 0 < n = \bar{n}$ (12の3)

$\displaystyle\int V'\left(\frac{x'\lambda}{p'}\right)\frac{x'}{p'}dF(x',p'\mid m,p) - \mu \leqq 0$, $\lambda > 0$ならば等号 (13)

$p(n-c) - \lambda \geqq 0, \mu >$ ならば等号 (14)

すなわち，ある $c \geqq 0$，$0 \leqq n \leqq \bar{n}$，$\lambda \geqq 0, p(n-c) - \lambda \geqq 0$ と $\gamma, \nu, \delta, \rho, \mu \geqq 0$ が存在して (a・1) ～ (a・8) が成立するならば，それがわれわれの最適解となる．

さらに言うならば，(11)，(12の1)，(12の2) (12の3)，(13)および(14)の等号を成立させる $c>0$，$\bar{n}>n>0$ および $\lambda>0$ が存在するとすれば，その (c, n, λ) が最適解となる．そして，$\mu>0$ は $U_c>0$，$U_n<0$ の性質よりおのずと明らかである．

この最適解の存在のために以下の仮定を設ける．

仮定Ⅰ (n,c) を閉領域 D_1 の内点とするとき[6)]，

(i) $\displaystyle\lim_{c\to+0} U_c(c,n) = \infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\bar{n}-0} U_n(c,n) = -\infty$

---

4) 一般的には，微分と積分の順序変更についての十分条件は，伊藤清三著 [10] 94-95ページとくに定理14.2を参照．本文の (a・3) において $V(c') = c'^{\frac{1}{2}}$ とし，他方分布関数をガンマ関数例えば $\frac{x'}{p'} = y$ として $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1}e^{-y}; 0 < \alpha < \infty$ とおけば，微分と積分の順序変更は容易であることがわかる．$V(c') = \log c'$ とおいてもガンマ分布関数の α について $\alpha > 1$ とすれば微分積分の順序変更が同様に容易であることがわかる．すなわち，$V(y\lambda) = (y\lambda)^{\frac{1}{2}}$ ないし $V(y\lambda) = \log(y\lambda)$ として考えてみればよい．

5) (a・2) について少し注釈を加えるならば，

$0 = n < \bar{n} \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow U_n(c,n) + \nu + p\mu = 0$

$0 < n < n < \bar{n} \Rightarrow \nu = 0, \rho = 0 \Rightarrow U_n(c,n) + p\mu = 0$

$0 < n = \bar{n} \Rightarrow \nu = 0 \Rightarrow U_n(c,n) - \rho + p\mu = 0.$

6) 以下の(i)～(ii)において，(n,c) は D の内点で考えられている．したがって，(i)の前者においては固定された n は $n<\bar{n}$ で，後者も $0<c$ である．(ii)についても同様．

(ii) 任意に固定した c に対して，$U_c(c,n)$ は有界.

任意に固定した n に対して，$U_n(c,n)$ は有界.

補題　仮定Iのもとでで，開区間 $(n_0,\bar{n})$ における$\frac{\lambda}{p}$についての以下の関数

$n=n(\frac{\lambda}{p})$，$c=c(\frac{\lambda}{p})$，$p\mu=h(\frac{\lambda}{p})$ が存在して，それぞれC^1—級関数である．そして，つぎの$\boxed{\text{i}}$および$\boxed{\text{ii}}$が成立する．すなわち，

$\boxed{\text{i}}$ これら $n,c,p\mu$ は(11)〜(14)の等式を満たす.

$\boxed{\text{ii}}$ $n(\frac{\lambda}{p})$，は$\frac{\lambda}{p}$について増加関数，$c(\frac{\lambda}{p})$は減少関数，$h(\frac{\lambda}{p})$ は増加関数.

上記の証明は，岩田〔11〕を参考にして行うことができる1)．そして，関数$h(\frac{\lambda}{p})$ の定義域は，$(0,\bar{n})$ で，値域は $(0,\infty)$ である2).

さて，ここで(11)〜(14)の経済学的説明を加えておこう.

すなわち，(11)および（12の1）そして（12の2）の等式が保証されれば，そして，事実それが示されるのであるが，l をレジャーとすれば $U(c,n)=U(c,\bar{n}-l)$ から分かるように，μは現在の消費財および現在のレジャーに支出される最適名目貨幣支出の限界効用であり，$p\mu$は消費財の限界効用そしてまた同時にレジャーの限界効用そのものであり，他方，最適実質貨幣支出の

1) 岩田 [11] 47-48ページの（註3）を参照. ただし47ページの左側の岩田の D° を $\bar{D}^\circ_1 = \mathrm{int}\bar{D}_1 = \{(n,c) \mid 0<c<n<\bar{n}\}$ と記号を変える．$0<c<n$ の範囲で考えようとするのは，$\lambda>0$ を保証したいからである.

岩田の註につぎのような補足を加えておこう．すなわち，開区間 $(n_0,\bar{n})$ で定義される n の C^1—級関数 $c=c_1(n)$ の定義域における n の範囲についての補足である．$n<\bar{n}$であることは明らか．問題は $n_0<n$ のn_0である．これは以下の inf である．すなわち，$n_0=\inf\{n \mid u(n,c)<0, 0<c^{\exists}<n\}>0$ である．かくして，区間 I は $I=\{n \mid 0<c^*\leqq n_0<n<\bar{n}\}$ と定義される．（この辺の説明については上記岩田 [11] の47ページを参照)．几長をいとわず付言するならば，岩田 [11] の47ページの右側の“(iii) $\lim_{n\to n_0+0} c_1(n)=c_0<n_0$ とすると”という帰謬法が許されるのは，関数 $c_1(n)$ の単調・有界性からであり，また同じ右側のまん中あたりの“また，仮定（※）から”という文は“また，$c_1(n)$ の定義から”と読み直せば，同ページ左側の(iii)の第2式 $\lim_{n\to\bar{n}-0} c_1(n)=0$ の説明の理解は，一層容易になろう．また，岩田 [11] 48ページの右側の$\frac{d}{d(\frac{\lambda}{p})}h(\frac{\lambda}{p})$は，$\frac{d}{d(\frac{\lambda}{p})}h(\frac{\lambda}{p})=\cdots\cdots\geqq 0$ としてゼロの可能性を許しているが，前述の如く，Bernstein and Toupin [3] が言っているように例外はあり得るがほとんどいたるところでヘッセの行列式 U は正であるから $h(\frac{\lambda}{p})$ は$\frac{\lambda}{\rho}$について狭義の増加関数と考えて良いであろう.

2) 値域が $(0,\infty)$ として考えるのが許されるのは，以下のように考えることによって理解できるであろう．例えば，$U(c,n)=c^\alpha(\bar{n}-n)^\beta$，$\alpha+\beta<1, \alpha>0, \beta>0$ なる効用関数は，$U_c=\alpha c^{\alpha-1}(\bar{n}-n)^\beta$，$U_n=-\beta c^\alpha(\bar{n}-n)^{\beta-1}$，$U_{cc}=\alpha(\alpha-1)c^{\alpha-2}(\bar{n}-n)^\beta$，$U_{nn}=\beta(\beta-1)c^\alpha(\bar{n}-n)^{\beta-2}$，$U_{cn}=-\alpha\beta c^{\alpha-1}(\bar{n}-n)^{\beta-1}$，これは，$\lim_{c\to+0} U_c(c,n)\to\infty$，$\lim_{n\to\bar{n}-0} U_n(c,n)\to-\infty$，そして$U_{cc}<0$，$U_{nn}<0$，
$\begin{vmatrix} U_{cc} & U_{cn} \\ U_{nc} & U_{nn} \end{vmatrix}>0$ を満たす.

ところで，岩田 [11] の48ページの左側より，

$p\mu=h(\frac{\lambda}{p})=U_c(c,n)=U_c(c(\frac{\lambda}{p}),n(\frac{\lambda}{p}))$であり，他方，均衡解であるから

$u(c,n)=U_c(c,n)+U_n(c,n)$

$=c^{\alpha-1}(\bar{n}-n)^{\beta-1}\{\alpha(\bar{n}-n)-\beta c\}=0, c=\frac{\alpha}{\beta}(\bar{n}-n)$，そして $U_c=\frac{\alpha^\alpha}{\beta^{\alpha-1}}(\bar{n}-n)^{\alpha+\beta-1}$

したがって，$\frac{\lambda}{p}\to\bar{n}$ ならば，$n(\frac{\lambda}{p})$ は狭義増加で，$n\to\bar{n}$ であるから $U_c\to\infty$．これは，図で示せば

限界効用ということもできるのである[1]．また，⒀式の等式は，

$$\int V'\left(\frac{x'\lambda}{p'}\right)\frac{x'}{p'}dF(x',p'\mid m,p)=\mu=h\left(\frac{\lambda}{p}\right)\frac{1}{p} \tag{15}$$

で，右辺のμの経済学的意味については，上述したとおりである．さて，μおよび$p\mu$をより解析的に考察してみよう．

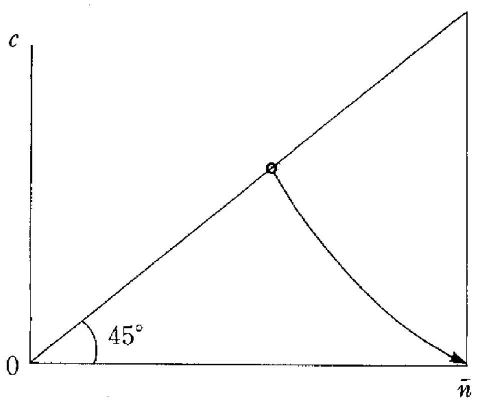
すなわち，左辺の積分は微積の順序変更を許す仮定を踏襲すれば，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int V\left(\frac{x'\lambda}{p'}\right)dF(x',p'\mid m,p)$$

$=\int V'\left(\frac{x'\lambda}{p'}\right)\frac{x'}{p'}dF(x',p'\mid m,p)$ であるから，これはヤングが現在の名目貨幣額λをオールドに持ち込すときの将来名目貨幣の限界期待効用を意味している．したがって，⒂式は主体的均衡においては，この将来名目貨幣（支出）の限界期待効用と現在名目貨幣（支出）の限界効用が等しくなっていることを意味する．また，

$$\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\lambda}{p}\right)}\int V\left(\frac{x'\lambda}{p'}\right)dF(x',p'\mid m,p)=\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\lambda}{p}\right)}\int V\left(\frac{x'p\lambda}{p'p}\right)dF(x',p'\mid m,p)$$

$=\int V'\left(\frac{x'\lambda}{p'}\right)\frac{px'}{p'}dF(x',p'\mid m,p)$ であるから，この積分はヤングが現在の実質貨幣$\frac{\lambda}{p}$をオールド期に持ち越すときに得られる．将来実質貨幣（支出）の限界効用である．したがって，



この曲線が，岩田［11］の47-48ページの$\frac{dc_1}{dn}=-\frac{U_{cn}+U_{nn}}{U_{cc}+U_{nc}}<0$を示すものである．これは，均衡線（c,n）の経路が，$(0,\bar{n})$に向かって行くことを意味し，その経路の極限が$U_c\to\infty$なのである．

また，$U(c,n)=\bar{n}(\bar{n}^2-n^2)^{\frac{1}{2}}+(2\bar{n}-n)\{c(2\bar{n}-c)\}^{\frac{1}{2}}$なる厳密に凹の効用関数は，$\lim_{c\to+0,n\to\bar{n}-0}Uc(c,n)=\infty$であるが，この関数は上図の均衡解の経路だけでなく，$(0,\bar{n})$に向かうすべての経路について，$U_c\to\infty$であることを意味する．しかしこれはきつい仮定となるであろう．このきつい効用関数については，岩田［13］の17ページ参照．

1）$\frac{U_c}{p}=-\frac{U_n}{p}=\frac{U_c dc-U_n dl}{pdc+pdl}=\frac{du}{dM}=\mu$，

ところでpdlのpは労働を限界単位減らす，すなわち，レジャーを限界単位増加させることに要する機会費用であり，そして，$-U_n$はレジャーの限界効用，また貨幣資産をMとすれば，$pdc+pdl=dM$で$du=U_c dc-U_n dl$であるから，μは貨幣支出の限界効用と言うことができる．また，$U_c=-U_n=p\mu$で，そして，$U_c dc-U_n dl/\frac{pdc+pdl}{p}=p\mu$であるから$p\mu$は最適実質貨幣支出の限界効用でもある．

$$\int V'\left(\frac{x'\lambda}{p'}\right)\frac{px'}{p'}dF(x',p'\mid m,p)=p\mu=h\left(\frac{\lambda}{p}\right) \tag{14'}$$

の等式は主体的均衡のときは，この将来実質貨幣（支出）の限界期待効用と現在実質貨幣（支出）の限界効用が等しいことを示している．さて，(11)から(13)の等式を満たす開区間 $(0,\bar{n})$ で定義された $\frac{\lambda}{p}$ の関数 $n=n\left(\frac{\lambda}{p}\right)$，$c=c\left(\frac{\lambda}{p}\right)$，$p\mu=h\left(\frac{\lambda}{p}\right)$ が存在し，かつ(15)を満たす $0<\frac{\lambda}{p}<\bar{n}$ なる $\frac{\lambda}{p}$ を見い出すことができるならば，それは Kuhn-Tucker の定理による最適解の存在を示したことになる．

4．ルーカスの均衡モデル

もし，上述の(11)～(15)を満たし，かつ，(1)式があらゆる主体について等号が成立するならば，主体の最適化と同時に生産物市場の均衡が成立する．ところで，アイデンティカルなヤングがアイデンティカルなオールドになって消費する(1)式の c^1 は $\frac{\lambda}{p}$ と考えることが許されるからかつ各ヤングにおいて(14)式が等号であることが示されるから生産物市場の均衡の成立が言える．他方，等号の（12の2）式が成立するならば，現在効用と将来効用の期待値の和を最大にするように主体が自分の労働を需要しかつそれだけの自分の労働の供給をする．そして，それがすべての主体において言えるから労働市場の均衡が成立する．

さて，貨幣市場の需給均衡を，ルーカスはどのように考えているか．それは，以下のようなものである．すなわち，既述のように，ヤングがオールドになるとき２つの島のそれぞれの総貨幣量が等しくなるように人口が再分配されるから，オールドの貨幣供給量が１つの市場のヤングに向けられる量は $\frac{Nmx}{2}$ で，その市場のヤングの人口は $N\frac{\theta}{2}$ であるから，この市場のヤング一人当たりに供給される貨幣量は $\frac{mx}{\theta}$ である[1)]．そして，ヤング一人当たりの次期のための貨幣需要量は λ であるから，ヤングの計画時点での貨幣の需給均衡は $\lambda=\frac{mx}{\theta}$ である．したがって，この均衡条件を組み入れた(15)式は，以下の(16)となる．

$$h\left(\frac{mx}{\theta p}\right)\frac{1}{p}=\int V'\left(\frac{mxx'}{\theta p'}\right)\frac{x'}{p'}dF(x',p'\mid m,p) \tag{16}$$

この(16)式を見ても分かるように，現在の価格 p と未知の将来価格 p′ とが関係づけられている．そして，この現在価格 p は均衡価格（n の価格でもあるから均衡賃金でもある）であり，したがって，雇用，産出量および消費量の均衡量をもたらすようにこの p と p′ が関係づけられていなければならない．

そして，この p と p′ との関連はルーカスが後述するような均衡の定義において示される．このことは，ルーカスによれば，以下のような考察から来ているとしている．第１は，既述したように“ある意味”において経済の状態は３つの変数 (m, x, θ) によって完全に記述され

1）もう１つの市場では，$\frac{Nmx}{2}N\left(1-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{mx}{2-\theta}$ である．

ており，そして，カレンダータイムによる2つの異なった時点で経済がある特定の状態（m,x,θ）に達しているとすれば，経済は両方の時点で同じ仕方で機能するのであり，その状態への達し方の経路のいかんにかかわらずその状態がもたらされると言っている．ルーカスはもち論，経済の"状態"という言葉については，必ずしも非常に良く定義されているわけではないがという限界を付しているのであるが，とにかくそのように述べているのである．したがって，このように考えているルーカスは，おのずと均衡価格を，可能な状態空間における関数 $p(m,x,\theta)$ として表し，そして雇用，産出量 n および消費量 c の均衡値についても同様に (m,x,θ) の関数であるとしている．

第2に，価格が (m,x,θ) の関数として表すことができるならば，翌期すなわちオールドのときの予想価格 p' は $p'=p(m',x',\theta')=p(mx,x',\theta')$ であり，そして，その真の確率分布は，m を条件とする x,x' および θ' の既知の確率分布から知ることができると言っている．さらに，現行価格 $p(m,x,\theta)$ は記述のように x についての情報を与えるから，この情報はまた取引する主体のヤングにとって利用可能なものである[1]．したがって，ヤングの計画主体は，m と $p(m,x,\theta)$ の値を条件とした (m,x,x',θ') の同時確率分布に関して先の(16)（あるいは(15)）の期待値をとることができる．あるいはまた，m をパラメーターとして，$p(m,x,\theta)$ の値が知られているという条件のもとでの (x,x',θ') の同時分布に関して上記の期待値をとることができる．この後者の考えに基づいたときの分布関数は $G(x,x',\theta'\,|\,p(m,x,\theta))$ である．そして，この関数は，以下の(17)式の積分値が一定値をとるように well-defined されたものである．

ところで，現行均衡価格を，$p=p(m,x,\theta)$ として表すとしたわれわれは，この均衡価格については，均衡解である最適解が等号で成立するためにつぎのような条件がみたされているはずである．すなわち，

$$0<\frac{mx}{\theta p(m,x,\theta)}<\bar{n} \qquad ※$$

である．これは，われわれが全体系の均衡解の存在証明において，$\frac{\lambda}{p}$ の定義域を開区間 $(0,\bar{n})$ として用い，他方，名目貨幣の需給の均衡により，$\lambda=\frac{mx}{\theta}$ であるからである[2]．したがって，上記の条件※は，

$$0<\frac{\lambda}{p(m,x,\theta)}<\bar{n}$$

に他ならず，そして，※を満たす $\frac{\lambda}{p(m,x,\theta)}$ は容易に見いだすことができる．そして，この式※は，n を無限大としているルーカスにはないものである．

また，(16)式は，

1）ルーカスは先に，現行価格を通して貨幣的攪乱的要因 x と実物的攪乱要因 θ を不完全にだけ知ることができると述べていた．（本論文6ページ，Lucas [18] p.66）．このことは，(x,x',θ') の同時確率分布は知ることができると言うことと解して良いであろう．しかし，θ についての他との同時確率分布にはふれていない．

2）本論文15-16ページ，岩田 [11] 45および47-48ページ参照．

$$h\left(\frac{mx}{\theta p(m,x,\theta)}\right)\frac{1}{p(m,x,\theta)}=\int V'\left[\frac{mxx'}{\theta p(m\xi,x',\theta')}\right]\frac{x'}{p(m\xi,x',\theta')}$$

$$\cdot dG(\xi,x',\theta')\,|\,p(m,x,\theta)) \tag{17}$$

ここで$G(x,x',\theta'|p(m,x,\theta))$の最初のxおよび$p'=p(m',x',\theta')=p(mx,x',\theta')$のxはξとおきかえられている．ここでルーカスは，$p=p(m,x,\theta)$の関数pと$p'=p(mx,x',\theta')$の関数pはおなじであるとしている．さて，(17)式は言うまでもなく，ヤングの計画時点における最適条件に貨幣の均衡条件を組入れたものであり，本来，この式の右辺の分子のxも確率変数であるはずであるが，ξとおきかえられていない．それは，最適解として求められたλに対し$\lambda=\frac{mx}{\theta}$として指定されており，ξとおきかえられた$p(mx,x',\theta')$のxとは性質を異にするからである．ところで，ルーカスの論証の過程で重要な役割を演ずるのは，均衡価格pおよびp′を，

$$p=p(m,x,\theta),\ p'=p(m',x',\theta')=p(mx,x',\theta')$$

とおいていることである．そして後に，関数$p(m,x,\theta)$を後述のように更に特定するのであるが，ルーカス自身，このように価格を状態(m,x,θ)の関数として表現することは無害のように見えるが，しかし非常に強い制約であると言っている[1)]．このようなルーカスの価格の特定は決定的役割をもつのである．われわれはそれについてのわれわれ自身の見解を後に付言するが，とにかくそれにしたがっていこう．

5．均衡価格関数の特徴

補題1． 均衡価格$p(m,x,\theta)$が(17)の解であるとすれば，任意にmを与えたとき$p(m,x,\theta)$と$\frac{x}{\theta}$は，1対1に対応する．すなわち，

(i) $\frac{x_0}{\theta_0}\neq\frac{x_1}{\theta_1}$ならば，$p(m,x_0,\theta_0)\neq p(m,x_1,\theta_1)$

(ii) $p(m,x_0,\theta_0)\neq p(m,x_1,\theta_1)$ならば，$\frac{x_0}{\theta_0}\neq\frac{x_1}{\theta_1}$である．

ルーカスは前者(i)を証明しているが，(ii)については証明してないから，グラモン（J. M. Grandmon't）から指摘を受けてCorrigendum（Lucas [21]）を書いたのであるが，1対1の正しい証明としてLang [17] および岩田 [12] を参照してもらうことにして省略する[2)]．

この補題1によって，(17)式をみたす均衡価格pは，mをパラメーターとして$\frac{x}{\theta}$の関数であることが分かる．

ところで，ルーカスは，(17)式の解が$p(m,x,\theta)=m\phi\left(\frac{x}{\theta}\right)$の形をとっているとしたことはa plausible conjectureであると言っている．そして，φは連続で非負の関数としているが，われわれは$\frac{x}{\theta}>0$ならば正の関数と仮定しておく[3)]．さらに，ルーカスは，財に対する需要は

1）Lucas [18] p.87 の注8を参照．

2）Lang [17] pp.392-393, 岩田 [12] 19-20ページなおルーカスの(i)の証明はLucas [18] p.74.

3）Lucas [18] p.74.

xとθのそれぞれの個個の大きさに影響されるのではなく，$\frac{x}{\theta}$だけがすなわちθに対するxの比だけが個個の生産者が直面する需要を決定すると言っている[1]．$\frac{x}{\theta}$だけがという意味は，貨幣量mも価格pももち論需要に影響を与えるのであるが，xやθの個個の大きさではなく$\frac{x}{\theta}$という比が決定因子であるということを強調していると解すべきであろう．このことを別な側面すなわち市場における財の需給均衡条件から内在的に考えて見よう．

さて，この財の均衡条件は，

$$\frac{Nmx}{2p} = (n-c)\frac{N\theta}{2} \qquad ※※$$

そして，この式のnおよびcは最適解のときは，ともに$\frac{\lambda}{p}$の関数であることが示されているから，$m\frac{1}{p}\frac{x}{\theta} = n(\frac{\lambda}{p}) - c(\frac{\lambda}{p})$であり，また貨幣の需給の均衡条件より

$$m\frac{1}{p}\frac{x}{\theta} = n(m\frac{1}{p}\frac{x}{\theta}) - c(m\frac{1}{p}\frac{x}{\theta}) \qquad ※※※$$

である．いうまでもなく，左辺はアイデンディカルな個人の財に対する需要である．したがって，mとpが与えられていれば，需要を決めるのは$\frac{x}{\theta}$なのである．

また，上記の※※※を満たす解

$$m\frac{1}{p}\frac{x}{\theta} = \alpha \qquad (\#)$$

が存在するとすれば，αはある一定値をとるはずである．したがって

$$p = \frac{m}{\alpha}\frac{x}{\theta} \qquad (\#\#)$$

である．それ故，財の需給均衡価格pは，αをパラメーターと考えれば，
$p = \psi(m, \frac{x}{\theta})$と表すことができる．しかし，上記（##）からも明らかなように，pはmが増加すればその比例倍だけ上昇する．このことに対応させるかのように，ルーカスは$p = \psi(m, \frac{x}{\theta}) = m\phi(\frac{x}{\theta})$としてmを外に出している．そして，ルーカスは，"このことに疑問を持つ人は，人びとの貨幣の分配を全然変えないような貨幣量の変化を，完全に知らせれば，その結果はどうであるか自分自身に尋ねるべきである"と述べている[2]．このことは，とりもなおさず，ルーカスは人びとの貨幣量の分配を変えずに例えばk倍するならば，価格がk倍になるという例の貨幣数量説に従っていると解してよいであろう．均衡価格pを$m\phi(\frac{x}{\theta})$と想定することは，ルーカスの解の存在にとって重要な鍵を握っていると言ってよい．価格をこのように想定することに疑問を抱くものにとっては解の存在にも疑問をもつであろう．ところで，ルーカスは彼の均衡体系の解の一義性が存在して，しかも，その解は$m\phi(\frac{x}{\theta})$であることを示したとして，少なからざる読者によって言及されることが多いが，そして，事実ルー

1）Lucas［18］p.87の注9を参照．
2）Lucas［18］p.87の注9を参照．
3）Lucas［21］p.197を参照．

カス自身に読者にそのように誤解される叙述があることは確かである．しかし，後に，ルーカスはその叙述についてのある箇所は invalid であり，また別な箇所は incorrect であったと述べ，かつ "$m\phi(\frac{x}{\theta})$ はユニークな均衡価格関数であるという定理1の主張はかくして成立しない" と認めているのである[3)]．実は彼の存在証明の出発点は，均衡価格 p を $p=m\phi(\frac{x}{\theta})$ としていることから始まっていると解することができるのである．ところで，上記※※※の解（#）である α がユニークならば関数 ϕ が線形であることは言うまでもない．しかし，ルーカスは ϕ を線形とは必ずしも考えていないようである．

さて，補題Iにより(17)の均衡価格 p は m が与えられたとき $\frac{x}{\theta}$ と1対1の対応があることが示されたから，(17)式は次の(17′)式になる．

$$h\left(\frac{mx}{\theta p(m,x,\theta)}\right)\frac{1}{p(m,x,\theta)}=\int V'\left(\frac{mxx'}{\theta p(m\xi,x',\theta')}\right)\frac{x'}{p(m\xi,x',\theta')}\cdot dG\left(\xi,x',\theta'\,\middle|\,m,\frac{x}{\theta}\right) \tag{17′}$$

また，ルーカスに従いこの式の均衡価格について，$p=m\phi(\frac{x}{\theta})$ とすれば，翌期の価格 p' は $p'=m\xi\phi(\frac{x'}{\theta'})$ であり，そして両辺に $\frac{mx}{\theta}$ を乗ずれば，(17′) 式は，

$$h\left[\frac{x}{\theta\phi(\frac{x}{\theta})}\right]\frac{x}{\theta\phi(\frac{x}{\theta})}=\int V'\left[\frac{xx'}{\theta\xi\phi(\frac{x'}{\theta'})}\right]\frac{xx'}{\theta\xi\phi(\frac{x'}{\theta'})}dG\left(\xi,x',\theta'\,\middle|\,\frac{x}{\theta}\right) \tag{18}$$

と整理される[4)]．

かつ，$z=\frac{x}{\theta}$，$z'=\frac{x'}{\theta'}$ とおく．そのとき，z の値を与えれば θ の値が決まれば x の値が決まるから，(18)式の右辺で ξ の代わりに θ を確率変数とすることにする．x, x' および，θ, θ' はそれぞれ独立と仮定している．

さて，分布関数は，$G(\xi,x',\theta'|\frac{x}{\theta})=G(z\theta,z'\theta',\theta'|z)$ であり，いま，z のもとでの $z\theta$ の条件付分布関数 $G_1(z\theta|z)$ と，$z'\theta'$ と θ' の同時分布関数 $G_2(z'\theta',\theta')$ とが独立で，かつ $G(z\theta,z'\theta',\theta'|z)=G_1(z\theta|z)G_2(z'\theta',\theta')$ として示すことができるとする[5)]．

そのとき，$dG(z\theta,z'\theta',\theta'|z)=d[G_1(z\theta|z)G_2(z'\theta',\theta')]=dG_1(z\theta|z)dG_2(z'\theta',\theta')$．

ところで，$\xi=\theta z$ で z が与えられているから，$d\xi=zd\theta$．したがって，$dG_1(\xi|z)=dG_1(z\theta|z)=g_1(\xi|z)d\xi=g_1(\theta z|z)zd\theta$．そして，$g_1(\theta z|z)z$ は z が与えられたときの θ の密度関数．

4）(17′) 式の分布関数では，m も条件とされていたが，(18)では m をパラメーターとして取り扱われている．したがって，厳密には G でなく $\hat{G}$ というような別な記号を用いたほうが良いであろう．

5）一般に $d[G_1(x)G_2(y,z)]=dG_1dG_2$ はつぎのようにして分かる．
$d[G_1(x)G_2(y,z)]=g_1(x)g_2(y,z)dxdydz=g_1(x)dxg_2(y,z)dydz=dG_1(x)dG_2(y,z)$

6）ヤコビアンは

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial z'} & \frac{\partial x'}{\partial \theta'_{※}}\\ \frac{\partial \theta'}{\partial z'} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta'_{※}}\end{vmatrix}=\theta'$$

他方，$G_2(x', \theta') = G_2(z'\theta', \theta')$ で $x' = \theta' z', \theta' \equiv \theta'_{※}$ である．
ただし，下つきの※は変換後の θ' を示すものである．そして，ヤコビアンを用いて

$$dG_2(x', \theta') = g_2(x', \theta')dx'd\theta'$$
$$= g_2(z'\theta', \theta')\theta' dz'd\theta' \text{ である}^{6)}.$$

さて，$g_2(z'\theta', \theta')\theta'$ は z' と θ' の同時密度関数であるから，
$g_1(\theta z \mid z)z = \tilde{H}(\theta \mid z)$，$g_2(z'\theta', \theta')\theta' = H(z', \theta')$ とすると $dG(\xi, x', \theta' \mid \frac{x}{\theta}) = \tilde{H}(\theta \mid z) \cdot H(z', \theta')d\theta dz'd\theta'$ と示すことができる．
他方，$z\theta = \xi$ であり，$z = \frac{x}{\theta}$ は与えられており，$z'\theta' = x'$ であるから，⒅式は，

$$h\left[\frac{z}{\phi(z)}\right]\frac{z}{\phi(z)}$$
$$= \int V'\left[\frac{\theta'}{\theta}\frac{z'}{\phi(z')}\right]\frac{\theta'}{\theta}\frac{z'}{\phi(z')}\tilde{H}(\theta \mid z)H(z', \theta')d\theta dz'd\theta' \qquad (19)$$

となる．さて，つぎの定理をあげ，そして証明を試みよう．

定理１　開区間 $(0, \infty)$ における連続微分可能な C^1-級関数 $\phi(z)$ で，かつ⒆をみたし，そして，$0 < \frac{z}{\phi(z)} < \bar{n}$ なる $\phi(z)$ がただ一つ存在する．

証明　まず，$0 < \frac{z}{\phi(z)} < \bar{n}$ は貨幣市場の需給均衡を前提にすれば，$\lambda = mz$ であり，他方，$p = m\phi(z)$ であるから，$0 < \frac{\lambda}{p} < \bar{n}$ である．他方，$h(\frac{\lambda}{p})$ は，$(0, \bar{n})$ で定義され，値域は既述のように開区間 $(0, \infty)$ である[7]．
そして，例外をのぞいてほとんどいたるところで狭義の増加関数である．それ故，$h(\frac{\lambda}{p})\frac{\lambda}{p}$ および $h(\frac{z}{\phi(z)})\frac{z}{\phi(z)}$ も同じ定義域と値域をもつ $\frac{\lambda}{p}$ ないし $\frac{z}{\phi(z)}$ に関する狭義の増加関数である．したがって，$\chi = \frac{z}{\phi(z)}$ とおけば $Y = h(\chi)\chi$ の逆関数 $G_1(Y)$ が存在し，この逆関数は，C^1-級関数の狭義の増加関数で，その定義域は $(0, \infty)$ で，値域は $(0, \bar{n})$ である．
すなわち，

$$\chi > 0 \text{ に対して，} G_1(\chi) > 0, \quad \lim_{\chi \to 0} G_1(\chi) = 0, \quad \lim_{\chi \to \infty} G_1(\chi) = \bar{n} \qquad (A1)$$

である．そして，

$$Y = h(\chi)\chi \triangleq H(\chi) \to \chi = H^{-1}(Y) \triangleq G_1(Y) \qquad \text{(i)}$$

さて，⒆式の左辺について

$$\Psi(z) \triangleq h\left(\frac{z}{\phi(z)}\right)\frac{z}{\phi(z)} \qquad ①$$

とおくと(i)より

$$\frac{z}{\phi(z)} = G_1(\Psi(z)) \qquad ②$$

で，この関数 G_1 は前述のように，定義域は $(0, \infty)$ で，$(0, \bar{n})$ を値域とする C^1-級関数である．
他方，$G_1(\chi)$ について以下のことが言える．すなわち，

7）本論16～17ページおよび注２）．

$$0 < \frac{\chi G'_1(\chi)}{G_1(\chi)} < 1 \tag{A2}$$

みたす[1)]．さて，$\frac{\theta'}{\theta}\frac{z'}{\phi(z')} = X$ とし，$G_2(X) = V'(X)X$ と定義すれば，$G_2(X) = G_2[G_1(\Psi(z'))\frac{\theta'}{\theta}]$ であり，他方，V についての仮定から $G_2(X) > 0$ で，かつ $G_2(X)$ は $(0,\infty)$ における狭義の増加 C^1-級関数で，ある正の数 $a(0<a<1)$ に対して

$$0 < \frac{XG'_2(X)}{G_2(X)} \leqq 1-a < 1 \tag{A3}$$

が成立する[2)]．

さて，(19)式は以下の（A4）式となる．

$$\Psi(z) = \int G_2[G_1(\Psi(z'))\frac{\theta'}{\theta}]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz' \tag{A4}$$

これは，関数Ψに関する方程式であり，Ψが（A4）の解であるための条件を示しているのであって，実際それが解として存在するかどうかは別である．この解の存在を証明することがわれわれの課題である．

いま，S を $(0,\infty)$ 上の有界連続関数の空間としてノルムは

$$\| f \| = \sup_z | f(z) |$$

と定めるものとする．さて，（A4）の左辺において $z>0$ について $\Psi(z)>0$ に着目して，S上の適当な f で

$$\Psi(z) = e^{f(z)} \tag{③}$$

と書き換えたとき，（A4）は，

$$e^{f(z)} = \int G_2[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz' \tag{A4$'$}$$

$$f(z) = \log\int G_2[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz' \tag{A4$''$}$$

となる．今度は（A4′）および（A4″）は関数 f に関する方程式であり，この解 f が果して存在するかを証明することになる．

さて，S から任意に f を選んだとき S 上の作用素

$$T : f \rightarrow Tf$$

を

$$[Tf](z) = Tf(z) = \log\int_\Omega G_2[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz' \tag{\#}$$

と定義する．その際，右辺の積分値が確定するとされている[3)]．そして，

1）$\frac{\chi G'(\chi)}{G_1(\chi)} = \frac{1}{1+\frac{h'(Y)Y}{h(Y)}} < 1$ より，（A 2）は成立する．

2）本論12ページの(5)，(6)およびその注1）を参照．

3）例えば $\tilde{H}$ および H が有界連続で，(θ, θ', z') が $\Omega = [\varepsilon, 2-\varepsilon] \times [\varepsilon, 2-\varepsilon](0, \frac{a}{\varepsilon}]$ に属していればよい．ただし，既述のように，ε は十分小さい正数．また x および x′ は十分大きい正数 a について $(0, a]$ の範囲にある．

$$Tf(z) = f(z),$$

$$\log\int_{\Omega} G_2\left[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz' = f(z)$$

なるユニークな解 f※ が存在することを，したがって，(A4)，(A4′)，(A4″)，⒆式を満たすユニークな解Ψ※それ故ユニークな解 f※ かくしてユニークな解 ϕ※ の存在証明を試みるのがわれわれの課題である．

その証明のためのステップとしてS上の f とは異なる任意の g を選んで

$$[Tg](z) = Tg(z) = \log\int_{\Omega} G_2\left[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz' \qquad (\#\#)$$

と定義する．同様に，右辺の積分値が確定するものとされている。つぎに，以下の補題2の証明を試みる．

補題2　Tは縮小写像である．すなわち，任意の2つの f,g∈S に対して

$$\| Tf - Tg \| \leqq (1-a)\| f-g \|$$

ただし，aは（A3）のaである．

さて，（#）式と（##）式より

$$\| Tf - Tg \| = \sup_z \left| \log\frac{\int G_2\left[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz'}{\int G_2\left[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz'} \right|$$

$$= \sup_z \left| \log\int \frac{G_2\left[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')}{\int G_2\left[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz'} d\theta d\theta' dz' \right|$$

$$= \sup_z \left| \log\int \frac{\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')G_2\left[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]}{\int G_2\left[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz'} d\theta d\theta' dz' \right|$$

$$= \sup_z \left| \log\int \frac{G_2\left[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')G_2\left[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]}{\int G_2\left[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz' G_2\left[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]} d\theta d\theta' dz' \right|$$

$$\leqq \sup_z \left| \log\int \frac{G_2\left[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')}{\int G_2\left[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz'} \right.$$

$$\left. \cdot \left\{ \sup_{z',\theta,\theta'} \left(\frac{G_2\left[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]}{G_2\left[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}\right]} \right) \right\} d\theta d\theta' dz' \right|$$

ところで，{　　} は sup であるから定数．したがって，積分記号の前に出すことができる．すなわち，

$$\leqq \sup_{z} \left| \log\left(\left\{ \sup_{z',\theta,\theta'} \left(\frac{G_2[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}]}{G_2[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}]} \right) \right\} \cdot \frac{\int G_2[G_1(e^{g(z')})]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz'}{\int G_2[G_1(e^{g(z')})]\tilde{H}(\theta \mid z)H(z',\theta')d\theta d\theta' dz'} \right) \right|$$

さて，積分の分母と分子が等しく，したがって右辺の絶対値は z に依存しない．他方，log は単調増加関数であるから，$\sup_{z',\theta,\theta'}$ を log の前に出すことが出来る．かくして，

$$\leqq \sup_{z',\theta,\theta'} \left| \log \frac{G_2[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}]}{G_2[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}]} \right|$$

すなわち

$$\| Tf - Tg \| \leqq \sup_{z',\theta,\theta'} \left| \log G_2[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}] - \log G_2[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}] \right| \tag{A5}$$

さて

$$\frac{\partial}{\partial x}\log G_2[G_1(e^x)\frac{\theta'}{\theta}] = \left(\frac{G_1(e^x)\frac{\theta'}{\theta}G_2'[G_1(e^x)\frac{\theta'}{\theta}]}{G_2[G_1(e^x)\frac{\theta'}{\theta}]} \right) \left\{ \frac{e^x G_1'(e^x)}{G_1(e^x)} \right\} \tag{A6}$$

ここで，(A6) の最初の〔　〕の値は (A3) によって 0 と $1-a$ の間の値をとり，つぎの｛　｝の値は (A2) から 0 と 1 の間の値をとる．

かくして，平均値の定理を用いるならば，ある x_0について，$f(z') < x_0 < g(z')$ あるいは $f(z') > x_0 > g(z')$ に対して

$$\left| \log G_2[G_1(e^{f(z')})\frac{\theta'}{\theta}] - \log G_2[G_1(e^{g(z')})\frac{\theta'}{\theta}] \right|$$

$$= \left| \frac{G_1(e^{x_0})\frac{\theta'}{\theta}G_2'[G_1(e^{x_0})\frac{\theta'}{\theta}]}{G_2[G_1(e^{x_0})\frac{\theta'}{\theta}]} \frac{e^{x_0}G_1'(e^{x_0})}{G_1(e^{x_0})} \cdot (f(z') - g(z')) \right| \leqq (1-a) \mid f(z') - g(z') \mid$$

(A5) から

$$\| Tf - Tg \| \leqq \sup_{z',\theta,\theta'} (1-a) \mid f(z') - g(z') \mid = (1-a) \| f - g \|$$

ところで，われわれの S は $(0,\infty)$ 上の有界連続関数の空間であるから完備である．それ故，補題 2 とバナッハの縮小写像の不動点定理から，$Tf = f$ はユニークな有界連続な解 $f^{※}$ をもつ[1]．したがって，(A4′) および (A4″) の f はこのユニークな $f^{※}$ である．ところで，③より，

1) Колмогоров И Фомин〔16〕c. 87-88. 邦訳69-71，亀谷俊司〔14〕87-89ページ，
Stokey and Lucas with Prescott〔34〕pp.49-52参照.

$\Psi^{※}(z)=e^{f(z)^{※}}$であり，(A4) は左辺，右辺ともΨはこのような$\Psi^{※}$である．さて，②より

$$\frac{z}{\phi^{※}_{(z)}}=G_1[\Psi^{※}(z)]$$

であり，関数G_1は定義域は$(0,\infty)$で，値域が$(0,\bar{n})$であるから，

$$0<\frac{z}{\phi^{※}_{(z)}}<\bar{n}$$

である．また

$$\phi^{※}_{(z)}=\frac{z}{G_1[\Psi^{※}_{(z)}]}$$

であるから，関数ϕもユニークな$\phi^{※}$である．かくして，(19)式を成立させる$\phi^{※}(z)$がただ一つ存在し，かつ$0<\frac{z}{\phi^{※}_{(z)}}<\bar{n}$である．

ただ，ここで注意を要するのは，効用関数U,Vにルーカスが与えた諸性質の他に，ルーカスが，均衡価格関数$p(m,x,\theta)$を自分で強い制約と言っている$p(m,x,\theta)=m\phi(\frac{x}{\theta})$を前提としたことである．しばしば，経済学者によってルーカスはルーカス・モデルにおいて，均衡価格は$m\phi(\frac{x}{\theta})$がただ一つ存在することを証明したと誤解されてきたが，既述のようにCorrigendum[21]で，ルーカス自身は存在証明において，ある箇所はinvalidであり，別な箇所はincorrectであったと言っているのである．正しくは均衡価格関数を$m\phi(\frac{x}{\theta})$と見なすことが許されれば，関数ϕは一義的に存在することを示したと言うべきであって$m\phi(\frac{x}{\theta})$以外のものがないということを示したのではないのである．

他方，S上の有界関数fをとってみての証明であるから，有界でない関数fしたがってまた有界でない関数ϕは存在しないということを示したわけではないことも断っておきたい．

定理2． θ,θ'がともに確率1で$\theta=\theta'=1$，すなわち，実質的に単一市場で非貨幣的攪乱がないケースを考える．そのとき，$\frac{x}{\phi(x)}=y$とすれば，$h(y)=V'(y)$を満たすユニークな解$y^{※}$が存在する．そして，(19)のただ一つの解は$\phi(x)=\frac{x}{y^{※}}$である．そして，均衡価格は，$p(m,x,\theta)=mx/y^{※}$で(17)のユニークな解である．

証明 定理1によって(19)を成立させる$\phi(z)$が$0<\frac{z}{\phi(z)}<\bar{n}$を満たすようにただ一つ存在することが証明された．ところで，$\theta=\theta'=1$より(19)式は，

$$h\left(\frac{x}{\phi(x)}\right)\frac{x}{\phi(x)}=\int V'\left(\frac{x'}{\phi(x')}\right)\frac{x'}{\phi(x')}f(x')dx' \tag{19'}$$

そして，$h(y)$は，定義域$(0,\bar{n})$で，値域が$(0,\infty)$で，かつ例外を除いてほとんどいたるところで狭義の単調増加関数である．したがって，(19')式の左辺全体も同様である．他方(19')の右辺は定数．それ故，この定数と等しくする左辺の$h(y)y$のyはユニークで，それを$y^{※}$とすれば，$\phi(x)=\frac{x}{y^{※}}$である．われわれの関心事である$\phi(x)$はこのようなものである．当然，$\phi(x')=\frac{x'}{y^{※}}$である．これを右辺に代入すれば，右辺は$V'(y^{※})y^{※}$となる．かくして，

$$h(y^{※})y^{※}=V'(y^{※})y^{※},\ h(y^{※})=V'(y^{※}) \tag{20}$$

そして，$p(m,x,\theta)=m\frac{x}{y^{※}}$ は，(19′)式のユニークな解である[1]．

上述の論述が示すように，関数ϕは定理1よりユニークであり，かつ $\frac{x}{\phi(x)}$ がユニークであるから，均衡価格は貨幣数量の変化によってのみ，しかも，その比例倍だけ変化するのである．この命題は実物的変数がいわば確率的でない場合の古典的貨幣中立性の命題に対応する．古典的貨幣の中立性の命題はデターミニスティックな経済体系で論じられる場合が多いのであるが，ルーカスは貨幣的側面に確率的に攪乱要因を導入し実物的側面を象徴する人口の確率変数θを恒等的に1に等しいとして，貨幣の中立性の命題を導いているのである．このような性質のθを1とすることは決して実物的側面に変動がないと初めから決めて掛かっているのではない．ただ，確率変数を貨幣的側面にだけに限定し，他はデターミニスティックの通常の体系で考えているということである．そして，上述の論証が示すように，貨幣量が変化するにもかかわらず，(19)ないし(19′)式から分かるように，実物的均衡量c,nおよび持ち込し均衡実質貨幣残高 $\frac{\lambda}{p}$ は一定なのである．そしてこのことは予想しない貨幣的変化が生じた場合においてさえそうなのである[2]．

つぎに，定理2とは対照的に実物的攪乱はあるが，貨幣的攪乱がない場合を考えてみよう．すなわち，貨幣的要因についてはデターミニスティックな体系で恒等的に $x=x'=1$ のケースであって，経済主体は補題1によって，mが与えられたとき価格を通してθを知ることができるのである．この場合の(19)式は，

$z=\frac{1}{\theta}$ でまた $z'=\frac{1}{\theta'}$ であるから，

$\psi(\theta)=\dfrac{1}{\theta\,\phi(\frac{1}{\theta})}$ とすれば，

$$h[\psi(\theta)]\psi(\theta)=\int V'[\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')]\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')g(\theta')d\theta' \tag{21}$$

である．そして右辺がθの関数であるからこの右辺を$l(\theta)$とする．

また，$\frac{dl}{d\theta}$，$V'[\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')]$ および $V''[\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')]$ をそれぞれ $l'(\theta)$, V' および V'' と略記すれば，

$$l'(\theta)=\int[V''\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')+V']\frac{-\theta'\psi(\theta')}{\theta^2}g(\theta')d\theta'.$$

そして，$l(\theta)$ の弾力性は

$$\frac{\theta l'(\theta)}{l(\theta)}=\frac{-\int V'\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')g(\theta')\frac{1}{V'}[V''\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')+V']d\theta'}{\int V'\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')g(\theta')d\theta'}$$

1）本論文の21ページ（#）を比較・参照．

2）予想しない貨幣的変化は，確率分布は分かっているが，あくまでランダムな変化であることを言っているのである．

3）本論文11-12ページの(6′)およびその注参照．

さて，Vについての仮定より[3)]，

$$0 < \frac{1}{V'}\left[V''\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')+V'\right] < 1$$

であるから，

$$\frac{\theta l'(\theta)}{l(\theta)} = \frac{-\int V'\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')g(\theta')\frac{1}{V'}\left[V''\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')+V'\right]d\theta'}{\int V'\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')g(\theta')d\theta'}$$

$$> \frac{-\int V'\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')g(\theta')d\theta'}{\int V'\frac{\theta'}{\theta}\psi(\theta')g(\theta')d\theta'} = -1$$

$$-1 < \frac{\theta l'(\theta)}{l(\theta)} < 0 \tag{22}$$

いま，(21)の両辺を微分すれば，

$$\left[h'(\psi(\theta))\psi(\theta)+h(\psi(\theta))\right]\psi'(\theta) = l'(\theta),$$

$$\frac{\psi'(\theta)h(\psi(\theta))}{l'(\theta)} = \frac{1}{\dfrac{h'(\psi(\theta))\psi(\theta)}{h(\psi(\theta))}+1}$$

他方，$h(\psi(\theta))\psi(\theta) = l(\theta)$ より

$$0 < \frac{\theta\dfrac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}}{\theta\dfrac{l'(\theta)}{l(\theta)}} = \frac{1}{\dfrac{h(\psi(\theta))\psi(\theta)}{h(\psi(\theta))}+1} < 1$$

したがって，(22)より，

$$0 > \frac{\theta\psi'(\theta)}{\psi(\theta)} > \frac{\theta l'(\theta)}{l(\theta)} > -1 \tag{23}$$

他方，

$$\theta = \frac{1}{z},\quad \psi(\theta) = \psi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z}{\phi(z)}$$

であるから，

$$\psi'(\theta) = \frac{z^2\{z\phi'(z)-\phi(z)\}}{\{\phi(z)\}^2}$$

かくして，

$$-1 < \frac{\theta\psi'(\theta)}{\psi(\theta)} = \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} - 1 < 0 \tag{24}$$

したがって[4)]，

4）式番号の(24)〜(26)は，Lucas〔18〕にはなく，われわれが別個につけたものである．

$$0 < \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} < 1 \tag{25}$$

また，$p = m\phi(z)$ より，

$$0 < \frac{md\phi(z)}{dz} / \frac{m\phi(z)}{z} < 1$$

$$0 < \frac{z}{p}\frac{dp}{dz} < 1 \tag{26}$$

かくして，つぎの定理が成立する．

定理3　x が確率1で恒等的に1の値をとるとき，(19)のユニークな均衡価格解 $p(m, x, \theta) = m\phi(\frac{1}{\theta})$ は0と1の間の弾力性をもっている．

これは，z がこの場合 θ が変化したときの均衡価格の変化を問題にしている1つの比較静学的考察である．そして，人口配分率 θ が小になれば（すなわち z が大きくなれば）現在財の価格が上昇し，したがって，現在財の価格に比して将来財の価格が下落するから，代替効果が所得効果より大であるノーマルケースにおいて，ヤングが将来財の消費を増やすためにオールドに備えて持ち込す実質貨幣残高を増加させるであろう[1)]．

6．理論の実証的含意

ここで，フィリップス曲線を取り上げて検討する．従来，フィリップスはイギリスの1861～1957年のイギリスの賃金率の変化と失業率を実証的に考察した飽くまで事後的なものであった．ところで，近時この曲線をあたかも事前的なものとして新古典派的に説明することが多くなった．そのような事態をルーカスは，Models of Business Cycles において，「若干の方程式は『フィリップス曲線』において価格や賃金を動かすと想定しているオークショナーのような架空の主体の決定ルールを記述している」と述べている[2)]．理論家がフィリップス・カーブを説明しているとき，ルーカスが述べた上述の言葉を真に理解しているとは思えないものがある．事実，これらの理論家は，実際の金融・財政政策との関連でインフレ率と失業率とのトレード・オフが現実に生じるということを一本のフィリップス曲線で説明しているのである．しかし，貨幣の増加は，たとえばオープンマーケット・オペレーションによってなされるかもしれないが，一旦貨幣の増加によってひき起こされた事態は不可逆的なものであり，また現実の公共投資による設備の増加は一層不可逆的なものであり，一本の曲線で説明おおせるものではないはずである．

では，計量経済学と理論を結合させてフィリップス曲線の右下がりを説明するには，いかにすべきかというのがルーカスのここでの課題であり，そしてまた，われわれの課題でもある．

1）本論文12-13ページの注2）を参照．
2）Lucas〔22〕pp.16-17，邦訳18ページ．

ルーカスは，そのためにY_tをt期における実質GNP，p_tをt期におけるインプリシトなGNPデフレータとしてつぎのような2変数の線形回帰モデルを考える．すなわち，

$$\log Y_t = \beta_0 + \beta_1 (\mathrm{Log}\ p_t - \mathrm{Log}\ p_{t-1}) + \varepsilon_t \tag{27}$$

ただし残差項ε_1，ε_2，…は独立で，かつ恒等的に同じ分布をもつ確率変数の系列（i.i.d. sequence）で平均はゼロである．ところで，

$\log p_t - \log p_{t-1} = \log(1+\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}})$ であり，いうまでもなく，$1+\frac{p_t - p_{t-1}}{p_t}$ はインフレ・ファクターと呼ばれるものであり，これとこの $\log(1+\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}})$ は狭義単調増加関数の関係にあり，また$\log Y_t$とY_tも単調増加関数の関係にあるから，もし，β_1の推定値が正で，推定された残差項ε_tがi.i.d. sequenceの仮定と矛盾しないならば，インフレーションと実質生産量の間にトレード・オフが存在することを示したことになる．先に，オーカンの法則との関連で実質GNPと雇用量に正の相関があることを述べたように，Y_tと雇用量に一定の関係があるから，上記(27)式は通常のフィリップス曲線を考察するモデルたり得るのである．

ルーカスは，彼の均衡モデルの解の存在証明を行った後に，つぎのような趣旨のことを述べているのである．すなわち，経済におけるすべての市場のこの動きが，観察された景気循環の一定の諸局面に実際共通しているかどうかを検討する段階に来ている．この問題を要約する1つの方法は，この経済の人びとが自分達が経験する経済の上昇と下降をどのように考えているかを述べることである．そしてさらに彼は言う．簡単に考える人は，貨幣増加率が平均より高いいわゆる貨幣拡張期を「良き時期」とさえ考えるであろう．とくにその時期を振り返って考えるときは一層そうである．オールドの世代がそう思うのはそれなりの理由がある．なぜならば，彼らは拡張された貨幣を移転として受け取るのであるからである．ヤングの世代も貨幣の拡張を是認するであろう．すなわち，彼らは，その貨幣の拡張を，自分が販売する財の価格を平均より高くするものであり，その結果，彼らの実質的富を平均して増加させるものとしてのみ認めるのである．もちろん，将来，彼らは自分たちがせっかく貯えた貨幣残高が実質的に減少し，したがって，そのために彼らの実質消費も下落することに気づいて失望するであろう．それは，確かに貨幣拡張期の初めに自分がある財の価格を騰貴させ利潤を増加させるであろうが，この企業が使用する原材料の価格や賃金をも上昇させるという全般的インフレーションとなり，経済の実質的事態は拡張前と同じであることに気が付くからである．しかし，彼らは自分たちの失望は以前の貨幣拡張に起因するとは考えず，現在のインフレーションを批判するのが普通なのである．このインフレーション批判は，インフレ率が平均より高い率で続いて，他方，実質生産高が下落している期間においてとくに厳しいのである．

以上のヤングとオールドの人びとのビヘイビァについてのルーカスの見解は，マネタリズムのフリードマンと同じであることにわれわれは気が付くであろう．しかし，ルーカスも，フリードマンもヤングとオールドのこのような行動形式については，それは一種の経済主体の錯覚によるものと見なすであろう．

ところで，一般に人びとは実質生産高の大きい期間の方を，小さい方より好ましいと考えるであろう．すなわち，既述のオーカンの法則が妥当するならば，大きい実質生産高は大きい雇用量に対応するから，人びとは大きい雇用量の時期を小さい雇用量の時期より好ましいと考えるからである．

では，インフレ率と実質生産高の関係を２つの変数の線形回帰モデルを用いて，しかも，ルーカスの今までの理論的モデルの分析方法を使用して検討してみようとするのがここでの課題である．すなわち，ルーカスの合理的予想の理論を用いて考察するのがここでの目的である．単なる事後的に観察されたデータを用いて考究するのではなく，合理的予想の理論的モデルによってフィリップス曲線を検討しようとするのである．

ここで，先に記した(27)式を，実際ルーカスの合理的予想の理論モデルで考察しよう．

さて，一人当たりの均衡雇用量ないし生産量 n は，$\frac{\lambda}{p}$ の関数であることはすでに示された[1]．そして，均衡価格関数についても，$p(m,x,\theta) = m\phi(\frac{x}{\theta})$ であることが言及された．他方，オールド時に備えてのヤング一人当たりの貨幣需要量 λ は，貨幣市場の需給均衡を前提にするならば，ヤング一人当たりに供給される貨幣量は $\frac{mx}{\theta}$ に等しいから[2]，

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{mx}{\theta m \phi(\frac{x}{\theta})} = \frac{\frac{x}{\theta}}{\phi(\frac{x}{\theta})}$$

である．また，もう１つの市場では，

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{mx}{(2-\theta)m\phi(\frac{x}{2-\theta})} = \frac{x}{(2-\theta)\phi(\frac{x}{(2-\theta)})}$$

である．

したがって，１つの市場の均衡雇用関数ないし生産関数は，

$$n\left(\frac{\frac{x}{\theta}}{\phi(\frac{x}{\theta})}\right) = n_1(\frac{x}{\theta})$$

で，もう１つの市場の均衡雇用関数ないし生産関数は，

1）本論15-16ページ参照.

2）本論18ページ参照.

3）１つの市場において，m が与えられたとき，$\frac{x}{\theta}$ と均衡価格 p とが１対１の関係であること，およびもう１つの市場においては，$\frac{x}{2-\theta}$ と p とが１対１の関係であることは，本論文20ページの補題１を参照.

また $\frac{x}{\theta}$ あるいは $\frac{x}{2-\theta}$ を需要の決定因子と見なすことができることについては本論文20-22ページを参照.

$$n\left(\frac{\frac{x}{2-\theta}}{\phi\left(\frac{x}{2-\theta}\right)}\right)=n_1\left(\frac{x}{2-\theta}\right)$$ である[3].

さて，両市場のt期の実質生産高の合計は以下の式で表される．

$$Y_t=\frac{1}{2}\theta_t N n_1\left(\frac{x_t}{\theta_t}\right)+\frac{1}{2}(2-\theta_t)Nn_1\left(\frac{x_t}{2-\theta_t}\right) \tag{28}$$

添字のtはt期のものであることを意味し，右辺の第1項に$\frac{1}{2}\theta_t N$を乗じ第2項に$\frac{1}{2}(2-\theta_t)N$を乗じているのは，生産関数$n_1\left(\frac{x_t}{\theta_t}\right)$は1つの市場はヤング一人当たりの生産量，$n_1\left(\frac{x_t}{2-\theta_t}\right)$はもう1つの市場のヤング一人当たりの生産量であるからである．したがって，1つの市場のヤングの人口である$\frac{1}{2}\theta_t N$を，およびもう1つの市場のヤングの人口$\frac{1}{2}(2-\theta_t)N$を乗じているのである．また，それぞれの市場の生産量にそれぞれの市場の均衡価格を乗ずることによって，

$$p_tY_t=\frac{1}{2}\theta_t N n_1\left(\frac{x_t}{\theta_t}\right)m_t\phi\left(\frac{x_t}{\theta_t}\right)+\frac{1}{2}(2-\theta_t)Nn_1\left(\frac{x_t}{2-\theta_t}\right)m_t\phi\left(\frac{x_t}{2-\theta_t}\right) \tag{29}$$

を得る．p_tは既述のことから分かるようにt期のインプリシトGNPデフレーターである．

ここで，(28)の両辺の対数をとり，かつ$x_t=e^{\log x_t}$に着目すると

$$\log Y_t=\log N+\log\left\{\frac{1}{2}\theta_t n_1\left(\frac{x_t}{\theta_t}\right)+\frac{1}{2}(2-\theta_t)n_1\left(\frac{x_t}{2-\theta_t}\right)\right\} \tag{28'}$$

$$=\log N+F_1(\log x_t,\theta_t) \tag{28''}$$

である．いうまでもなく，

4) 確率密度関数が$\theta\in[\varepsilon,2-\varepsilon]$において対称であるから，$g(2-\theta)=g(\theta)$．ただし，$\theta$がこの閉区間以外のときは$g(\theta)=0$．そのとき，

$$\int_\varepsilon^{2-\varepsilon}\theta g(\theta)d\theta=1$$

であることの証明は以下のようなものである．

$$\int_\varepsilon^{2-\varepsilon}\theta g(\theta)d\theta=\int_\varepsilon^1\theta g(\theta)d\theta+\int_1^{2-\varepsilon}\theta g(\theta)d\theta$$

θをvに変換する．$\theta=2-v \Rightarrow v=2-\theta$

そのとき

$$\int_\varepsilon^1\theta g(\theta)d\theta+\int_1^{2-\varepsilon}\theta g(\theta)d\theta=\int_\varepsilon^1\theta g(\theta)d\theta+\int_1^\varepsilon(2-v)g(2-v)(-dv)$$

$$=\int_\varepsilon^1\theta g(\theta)d\theta+\int_\varepsilon^1(2-v)g(2-v)dv$$

$$=\int_\varepsilon^1\theta g(\theta)d\theta+\int_\varepsilon^1 2g(2-v)dv-\int_\varepsilon^1 vg(2-v)dv$$

$$=2\int_\varepsilon^1 g(v)dv=\int_\varepsilon^1 g(v)dv+\int_\varepsilon^1 g(v)dv$$

$$=\int_\varepsilon^1 g(v)dv+\int_{2-\varepsilon}^1 -g(2-\theta)d\theta$$

$$=\int_\varepsilon^1 g(v)dv+\int_1^{2-\varepsilon}g(\theta)d\theta=\int_\varepsilon^{2-\varepsilon}g(\theta)d\theta=1.$$

$F_1(\mathrm{Log}x_t, \theta_t) =$

$$\log\{\frac{1}{2}\theta_t n_1(\frac{x_t}{\theta_t})+\frac{1}{2}(2-\theta_t)n_1(\frac{x_t}{2-\theta_t})\} \qquad (28''')$$

である．いま，$\xi_t=\log x_t$ とおき，また $\mu=E[\xi_t]$ としよう．そして，$F_1(\xi_t,\theta_t)$ を $(\xi_t,\theta_t)=(\mu,1)$ の近傍でテイラー展開する．$(\mu,1)$ の1は確率変数 θ_t の期待値すなわち平均値であり[4]，また，x_t でなく $x_t=e^{\log x_t}$ に着目して ξ_t の関数として取り扱っているのは有意味な結論を出すのに好都合だからである．したがって，$E[\theta_t]=1$ で展開するときと同様に，$E[\log x_t]=\mu$ で展開するのは決して恣意的なものではなく十分意味があるのである．そして，2次以上の項を省略して近似できるとすれば，

$$F_1(\xi_t,\theta_t)\fallingdotseq F_1(\mu,1)+(\xi_t-\mu)[\frac{\partial F_1}{\partial \xi_t}{}_{(\mu,1)}]+(\theta_t-1)[\frac{\partial F_1}{\partial \theta_t}{}_{(\mu,1)}]$$

で，かつ (28''') より

$F_1(\mu,1)=\log n_1(e^{\mu})$ である．

他方，$[\frac{\partial F_1}{\partial \xi_t}{}_{(\mu,1)}]=\frac{n'_1(e^{\mu})}{n_1(e^{\mu})}e^{\mu}$，$[\frac{\partial F_1}{\partial \theta_t}{}_{(\mu,1)}]=0$ であるから[5]，

$$F_1(\log x_t,\theta_t)\fallingdotseq \log n_1(e^{\mu})+\frac{n_1(e^{\mu})}{n_1(e^{\mu})}e^{\mu}(\log x_t-\mu) \qquad (28'''')$$

さて，関数 $n_1(\frac{x_t}{\theta_t})$ において $\frac{x_t}{\theta_t}=e^{\mu}$ とおいたときの $n_1(e^{\mu})$ の弾力性の値を η_{n_1} とすれば，(28') と (28'''') より

$$\log Y_t\fallingdotseq \log N+\log n_1(e^{\mu})+\eta_{n_1}(\log x_t-\mu) \qquad (30)$$

つぎに，$x_t=e^{\log x_t}$ に着目すれば(29)より

---

5) $\frac{\partial F_1}{\partial \xi}$ を求めるにはつぎのようにする．ただし，添字tは省く

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi}=\frac{\frac{1}{2}\theta n'_1(\frac{e^{\xi}}{\theta})\frac{e^{\xi}}{\theta}+\frac{1}{2}(2-\theta)n'_1(\frac{e^{\xi}}{2-\theta})\frac{e^{\xi}}{2-\theta}}{\frac{1}{2}\theta n_1(\frac{e^{\mu}}{\theta})+\frac{1}{2}(2-\theta)n_1(\frac{e^{\xi}}{2-\theta})}$$

そして，$\xi=\mu$，$\theta=1$ ならば，$\frac{n'_1(e^{\mu})}{n_1(e^{\mu})}e^{\mu}$．$[\frac{\partial F_1}{\partial \theta}{}_{(\mu,1)}]=0$ についても同様に求めることができる．

6) $$\frac{\partial F_2}{\partial \xi}=\frac{\frac{1}{2}\theta n'_1(\frac{e^{\xi}}{\theta})\frac{e^{\xi}}{\theta}\phi(\frac{e^{\xi}}{\theta})+\frac{1}{2}(2-\theta)n'_1(\frac{e^{\xi}}{2-\theta})\frac{e^{\xi}}{2-\theta}\phi(\frac{e^{\xi}}{2-\theta})}{\frac{1}{2}\theta n_1(\frac{e^{\xi}}{\theta})\phi(\frac{e^{\xi}}{\theta})+\frac{1}{2}(2-\theta)n_1(\frac{e^{\xi}}{2-\theta})\phi(\frac{e^{\xi}}{2-\theta})}$$
$$\frac{+\frac{1}{2}\theta n_1(\frac{e^{\xi}}{\theta})\phi'(\frac{e^{\xi}}{\theta})\frac{e^{\xi}}{\theta}\times\frac{1}{2}(2-\theta)n_1(\frac{e^{\xi}}{2-\theta})\phi'(\frac{e^{\xi}}{2-\theta})\frac{e^{\xi}}{2-\theta}}{}$$

$\theta=1$ ならば

$$\frac{\partial F_2}{\partial \xi}=\frac{n'_1(e^{\xi})\phi(e^{\xi})+n_1(e^{\xi})\phi'(e^{\xi})}{n_1(e^{\xi})\phi(e^{\xi})}e^{\xi}=\frac{n'_1(e^{\xi})}{n_1(e^{\xi})}e^{\xi}+\frac{\phi'(e^{\xi})}{\phi(e^{\xi})}e^{\xi}$$

$\xi=\mu$ ならば

$$\frac{\partial F_2}{\partial \xi}=\frac{n'_1(e^{\mu})}{n_1(e^{\mu})}e^{\mu}+\frac{\phi'(e^{\mu})}{\phi(e^{\mu})}e^{\mu}$$

他方，$F_2(\mu,1)=\log n_1(e^{\mu})\phi(e^{\mu})$．

$$\log p_t + \log Y_t = \log N + \log m_t + F_2(\log x_t, \theta_t) \tag{30'}$$

ただし，

$$F_2(\log x_t, \theta_t) = \log\left\{\frac{1}{2}\theta_t n_1\left(\frac{x_t}{\theta_t}\right)\phi\left(\frac{x_t}{\theta_t}\right) + \frac{1}{2}(2-\theta_t)n_1\left(\frac{x_t}{2-\theta_t}\right)\phi\left(\frac{x_t}{2-\theta_t}\right)\right\} \tag{30''}$$

である．そして，やはり $F_2(\xi_t, \theta_t)$ が $(\xi_t, 0) = (\mu, 1)$ の近傍でテイラー展開して2次以上の項が無視できるとすれば[6)]，

$$F_2(\log x_t, \theta_t) \fallingdotseq \log n_1(e^{\mu})\phi(e^{\mu}) + (\eta_{n_1} + \eta_{\phi})(\log x_t - \mu) \tag{30'''}$$

$$\eta_{n_1} = \frac{n'_1(e^{\mu})}{n_1(e^{\mu})}e^{\mu},\ \eta_{\phi} = \frac{\phi'(e^{\mu})}{\phi(e^{\mu})}e^{\mu}$$

したがって，(30′) より

$$\begin{aligned}\log p_t + \log Y_t &= \\ &\log N + \log m_t + \log n_1(e^{\mu})\phi(e^{\mu}) + (\eta_{n_1} + \eta_{\phi})(\log x_t - \mu) \\ &= \log N + \log m_t + \log n_1(e^{\mu}) + \log\phi(e^{\mu}) + (\eta_{n_1} + \eta_{\phi})(\log x_t - \mu)\end{aligned} \tag{30''''}$$

(30′′′′) と(30)から，

$$\log p_t \fallingdotseq \log m_t + \log\phi(e^{\mu}) + \eta_{\phi}(\log x_t - \mu)$$

したがって，

$$\log p_t - \log p_{t-1} \fallingdotseq \log m_t - \log m_{t-1} + \eta_{\phi}(\log x_t - \log x_{t-1})$$

また，$m_t = m_{t-1}x$ であるから

$$\log m_t = \log m_{t-1} + \log x_{t-1}$$

それ故

$$\log p_t - \log p_{t-1} \fallingdotseq \eta_{\phi}\log x_t + (1-\eta_{\phi})\log x_{t-1} \tag{31}$$

つぎに，前述の線形回帰モデルの β_1 の最小2乗推定値 $\hat{\beta}_1$ を求めてみよう．この $\hat{\beta}_1$ は，$\log Y_t$ と $\log\frac{p_t}{p_{t-1}}$ の共分散である $\mathrm{Cov}[\log Y_t, \log\frac{p_t}{p_{t-1}}]$ を，$\log(\frac{p_t}{p_{t-1}})$ の分散 $\mathrm{Var}[\log(\frac{p_t}{p_{t-1}})]$ で割ったものである．そして，$\mathrm{Cov}[\log Y_t, \log(\frac{p_t}{p_{t-1}})] = E[\{\log Y_t - E[\log Y_t]\}\{\log(\frac{p_t}{p_{t-1}}) - E[\log(\frac{p_t}{p_{t-1}})]\}] \fallingdotseq \eta_n\eta_{\phi}\mathrm{Var}[\log x_t] + \eta_n(1-n_{\phi})\mathrm{Cov}[\log x_t, \log x_{t-1}]$ となり[7)]，他方 x_t, x_{t-1} は独立であるから $\mathrm{Cov}[\log x_t, \log x_{t-1}]$ はゼロとなる．したがって，

7） ≒と近似としたのは，(30)および(31)がテイラー展開による近似式だからである．

また，$\log Y_t - E[\log Y_t]$

$= \log N + \log n_1(e^{\mu}) + \eta_{n_1}(\log x_t - \mu) - \log N - \log n_1(e^{\mu})$

$= \eta_{n_1}(\log x_t - \mu)$，

$\log(\frac{p_t}{p_{t-1}}) - E[\log(\frac{p_t}{p_{t-1}})]$

$= \eta_{\phi}\log x_t + (1-\eta_{\phi})\log x_{t-1} - \eta_{\phi}\mu - (1-\eta_{\phi})\mu$

$= \eta_{\phi}(\log x_t - \mu) + (1-\eta_{\phi})(\log x_{t-1} - \mu)$，

$\{\log Y_t - E[\log Y_t]\}\{\log\frac{p_t}{p_{t-1}} - E[\log(\frac{p_t}{p_{t-1}})]\} = \eta_{n_1}\eta_{\phi}(\log x_t - \mu)^2 + \eta_{n_1}(1-\eta_{\phi})(\log x_{t-1} - \mu)(\log x_t - \mu)$.

そして，この期待値をとると本文の式になる．

$$\mathrm{Cov}[\log Y_t, \log(\frac{p_t}{p_{t-1}})] \doteqdot \eta_n \eta_\phi \mathrm{Var}[\log x_t] \qquad (※)$$

同様に(31)と x_t, x_{t-1}についての i.i.d. の仮定から

$$\mathrm{Var}[\log(\frac{p_t}{p_{t-1}})] \doteqdot \eta_\phi^2 \mathrm{Var}[\log x_t] + (1-\eta_\phi)^2 \mathrm{Var}[\log x_{t-1}]$$

$$= \{(1-\eta_\phi)^2 + \eta_\phi^2\} \mathrm{Var}[\log x_t] \qquad (※※)$$

である[1].

したがって，最小2乗推定値$\hat{\beta}_1$は上記（※）式を（※※）式で割ったものであるから，

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\eta_n \eta_\phi}{(1-\eta_\phi)^2 + \eta^2_\phi} > 0 \text{ である.}$$

また，β_0の最小2乗の推定値$\hat{\beta}_0$は，

$$\hat{\beta}_0 = \log N + \log n_1(e^\mu) - \mu \hat{\beta}_1$$

である[2].

そして，残差推定値$\hat{\varepsilon}_t$は，

$$\hat{\varepsilon}_t = \log Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \log(\frac{p_t}{p_{t-1}}) = \log Y_t - E[\log Y_t] - \hat{\beta}_1 \{\log(\frac{p_t}{p_{t-1}})$$

$$-E[\log(\frac{p_t}{p_{t-1}})]\} \qquad (※※※)$$

である.

さて，いま，残差項〔ε_t〕が，

$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \nu_t$で示され$\nu_t$が期待値がゼロで$t=1,2\cdots$であるとすれば，相関係数$\rho$の推定値$\hat{\rho}$は，$\hat{\rho} = \dfrac{\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}_t, \hat{\varepsilon}_{t-1})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\varepsilon}_t)}\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\varepsilon}_{t-1})}}$である.

さて，(※※※）より，$E[\hat{\varepsilon}_t] = E[\hat{\varepsilon}_{t-1}] = 0$は明白．したがって，

$$\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}_t, \hat{\varepsilon}_{t-1})$$

$$= -\hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)(\eta_{n_1} - \hat{\beta}_1 \eta_\phi)\mathrm{Var}[\log x_{t-1}]$$ [3]

他方，$\mathrm{Var}[\hat{\varepsilon}_t]$および$\mathrm{Var}[\hat{\varepsilon}_{t-1}]$は，

$\mathrm{Var}[\hat{\varepsilon}_t] = \{(\eta_{n_1} - \hat{\beta}_1 \eta_\phi)^2 + \hat{\beta}_1^2(1-\eta_\phi)^2\} \mathrm{Var}[\log x_t]$,

$\mathrm{Var}[\hat{\varepsilon}_{t-1}] = \{(\eta_{n_1} - \hat{\beta}_1 \eta_\phi)^2 + \hat{\beta}_1^2(1-\eta_\phi)^2\} \mathrm{Var}[\log x_{t-1}] = \{(\eta_{n_1} - \hat{\beta}_1 \eta_\phi)^2 + \hat{\beta}_1^2(1-\eta_\phi)^2\} \mathrm{Var}[\log x_t]$である[4].

---

1) $\mathrm{Var}[\log(\frac{p_t}{p_{t-1}})] \doteqdot E[\{\eta_\phi \log x_t + (1-\eta_\phi)\log x_{t-1} - \eta_\phi \mu - (1-\eta_\phi)\mu\}^2] = E[\{\eta_\phi(\log x_t - \mu) + (1-\eta_\phi)(\log x_{t-1} - \mu)\}^2] = E[\eta^2_\phi(\log x_t - \mu)^2 + 2\eta_\phi(1-\eta_\phi)(\log x_t - \mu)(\log x_{t-1} - \mu) + (1-\eta_\phi)^2(\log x_{t-1} - \mu)^2]$

そして〔　〕の第2項の期待値は$\log x_t$と$\log x_{t-1}$が独立故ゼロ.

したがって，本文の式が得られる.

2) $\hat{\beta}_0 = E[\log Y_t] - \hat{\beta}_1 E[\log p_t - \log p_{t-1}] = \log N + \log n_1(e^\mu) - \hat{\beta}_1\{\eta_\phi \mu + (1-\eta_\phi)\mu\} = \log N + \log n_1(e^\mu) - \mu \hat{\beta}_1$.

それ故，$\hat{\rho} = \dfrac{-\hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)}{(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)^2+\hat{\beta}_1^2(1-\eta_\phi)^2}$であり，それに$\hat{\beta}_1 = \dfrac{\eta_{n_1}\eta_\phi}{(1-\eta_\phi)^2+\eta^2_\phi}$を代入すると，密度関数$f(x)$，$g(\theta)$から導かれたある関数にプロウジナルなある限定を設けるならば，確率変数に新たに領域を設けた本論文でも一般的に$1>\eta_\phi>0$と言えるから[5)]，

$$\hat{\rho} = \frac{-(1-\eta_\phi)\eta_\phi}{(1-\eta_\phi)^2+\eta^2_\phi} < 0$$

このことは$\{\varepsilon_t\}$は負の系列相関をもつことを意味し，ε_tはi.i.d.という仮定に矛盾するのでいささか厄介な事態である．しかし，以下のような3変数の回帰式

$$\log Y_t = a_0 + a_1\log Y_{t-1} + a_2\log\frac{p_t}{p_{t-1}} + \tau \tag{31''}$$

3）$\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}_t, \hat{\varepsilon}_{t-1})$

$= E[\{\log Y_t - E[\log Y_t] - \hat{\beta}_1\cdot(\log\frac{p_t}{p_{t-1}} - E[\log\frac{p_t}{p_{t-1}}])\}$

$\{\log Y_{t-1} - E[\log Y_{t-1}] - \hat{\beta}_1(\log\frac{p_{t-1}}{p_{t-2}} - E[\log\frac{p_{t-1}}{p_{t-2}}])\}$

$= E[\{(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)(\log x_t-\mu) - \hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)(\log x_{t-1}-\mu)\}$

$\{(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)(\log x_{t-1}-\mu) - \hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)(\log x_{t-2}-\mu)\}]$

$= E[(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)^2(\log x_t-\mu)(\log x_{t-1}-\mu) - (\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)$

$\hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)(\log x_t-\mu)(\log x_{t-2}-\mu) - \hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)(\log x_{t-1}-\mu)^2 + \hat{\beta}_1^2(1-\eta_\phi)^2$

$(\log x_{t-1}-\mu)(\log x_{t-2}-\mu)] = (\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)^2\,\mathrm{Cov}[\log x_t, \log x_{t-1}] - (\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)\hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)$

$\mathrm{Cov}[\log x_t, \log x_{t-2}] - \hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)\mathrm{Var}[\log x_{t-1}] + \hat{\beta}_1^2(1-\eta_\phi)^2\,\mathrm{Cov}[\log x_{t-1},$

$\log x_{t-2}]$

ところで，$\log x_t, \log x_{t-1}, \log x_{t-2}$はそれぞれi.i.d.の仮定があるから，$\mathrm{Cov}[\log x_t, \log x_{t-1}] = \mathrm{Cov}[\log x_t, \log x_{t-2}] = \mathrm{Cov}[\log x_{t-1}, \log x_{t-2}] = 0$.

それ故，

$\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}_t, \hat{\varepsilon}_{t-1}) = -\hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)\mathrm{var}[\log x_{t-1}]$

4）$\mathrm{var}[\hat{\varepsilon}_t] = E[\hat{\varepsilon}_t - E[\hat{\varepsilon}_t]]^2 = E[\hat{\varepsilon}_t]^2 = E[\{(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)(\log x_t-\mu) - \hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)(\log x_{t-1}-\mu)\}^2]$

$= (\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)^2\,\mathrm{var}[\log x_t] - 2(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)\hat{\beta}_1(1-\eta_\phi)\mathrm{Cov}[\log x_t, \log x_{t-1}] + \hat{\beta}_1^2(1-\eta_\phi)^2$

$\cdot\,\mathrm{var}[\log x_{t-1}]$

$= \{(\eta_{n_1}-\hat{\beta}_1\eta_\phi)^2 + \hat{\beta}_1^2(1-\eta_\phi)^2\}\,\mathrm{var}[\log x_t]$

なぜならば，i.i.d.の仮定から$\mathrm{var}[\log x_t] = \mathrm{var}[\log x_{t-1}]$，

また，$\mathrm{Cov}[\log x_t, \log x_{t-1}] = 0$であるからである．

同様に，

$\mathrm{var}[\hat{\varepsilon}_{t-1}] = \{(\eta_n-\hat{\beta}_1\eta_\phi)^2 + \hat{\beta}_1^2(1-\eta_\phi)^2\}\,\mathrm{Var}[\log x_t]$

5）Lucas〔18〕p.76およびp.78参照．ただし，p.78の(26)式は正しくは，$0<\dfrac{z\phi'(z)}{\phi(z)}<1$である．このp.76およびp.78は恒等的には$\theta=1$でないケースを取り扱っている．しかし，(26)式がxとθがともに本来の確率変数である一般的ケースの定理である．ところで$f(x)$と$g(\theta)$から導かれた関数とは，p.77の$F(z,\bar{\theta}) = \int_0^{\bar{\theta}}\tilde{H}(z,\theta)\,d\theta$で，ある限定とは同ページの(24)式である．p.76および本論文30ページは$x=1$のケースである．

また，$0<\dfrac{z\phi'(z)}{\phi(z)}<1$については，証明はルーカスのp.77-78および岩田論文Ⅱ〔12〕の22～24ページも参照されることを望む．本論文の末尾の補注も理解の一助となろう．

6） $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ はつぎのようにして求める．記号を $y_t=\log Y_t-E(\log Y_t)$, $x_{1t}=1$, $x_{2t}=\log Y_{t-1}-E(\log Y_{t-1})$, $x_{3t}=\log p_t-\log p_{t-1}-E(\log p_t-\log p_{t-1})$ と定めることにする．
そのとき，

$\hat{\alpha}_1 \mathrm{Var}(x_{2t})+\hat{\alpha}_2 \mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t})=\mathrm{Cov}(x_{2t},y_t)$

$\hat{\alpha}_1 \mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t})+\hat{\alpha}_2 \mathrm{Var}(x_{3t})=\mathrm{Cov}(x_{3t},y_t)$

$$\hat{\alpha}_1=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{Cov}(x_{2t},y_t) & \mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t})\\ \mathrm{Cov}(x_{3t},y_t) & \mathrm{Var}(x_{3t})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{Var}(x_{2t}) & \mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t})\\ \mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t}) & \mathrm{Var}(x_{3t})\end{vmatrix}}$$

$$\hat{\alpha}_2=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{Var}(x_{2t}) & \mathrm{Cov}(x_{2t},y_t)\\ \mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t}) & \mathrm{Cov}(x_{3t},y_t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{Var}(x_{2t}) & \mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t})\\ \mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t}) & \mathrm{Var}(x_{3t})\end{vmatrix}}$$

$\hat{\alpha}_0=E(\log Y_t)-\hat{\alpha}_1 E(\log Y_{t-1})-\hat{\alpha}_2 E(\log p_t-\log p_{t-1})$

である．

$\hat{\alpha}_1$ および $\hat{\alpha}_2$ を求めるための分母は，

分母$=\mathrm{Var}(x_{2t})\mathrm{Var}(x_{3t})-\{\mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t})\}^2$

さて，

$\mathrm{var}(x_{2t})=E[\log N+\log n_1(e^{\mu})+\eta_{n_1}(\log x_{t-1}-\mu)-\log N-\log n_1(e^{\mu})]^2$

$=E[\eta^2_{n_1}(\log x_{t-1}-\mu)^2]=\eta^2_{n_1}\mathrm{Var}[\log x_{t-1}]$

$\mathrm{Var}(x_{3t})=E[\log p_t-\log p_{t-1}-E(\log p_t-\log p_{t-1})-E\{\log p_t-\log p_{t-1}-E(\log p_t-\log p_{t-1})\}]^2$

$=E[\eta_\phi \log x_t+(1-\eta_\phi)(\log x_{t-1}-\mu)]^2=E[\eta^2_\phi(\log x_t-\mu)^2+2\eta_\phi(1-\eta_\phi)(\log x_t-\mu)(\log x_{t-1}-\mu)+(1-\eta_\phi)^2(\log x_{t-1}-\mu)^2]$

$=\eta_\phi^2 E[(\log x_t-\mu)^2]+2\eta_\phi(1-\eta_\phi)\cdot\mathrm{Cov}[\log x_t,\log x_{t-1}]+(1-\eta_\phi)^2E[(\log x_{t-1}-\mu)^2]$

$=(1-2\eta_\phi+2\eta_\phi^2)\mathrm{Var}[\log x_t]$

（なぜならば，$\log x_t$ と $\log x_{t-1}$ は独立故，その Cov はゼロであるからである．）かくして，

$\mathrm{Var}(x_{2t})\cdot\mathrm{Var}(x_{3t})=\eta^2_{n_1}(1-2\eta_\phi+2\eta^2_\phi)\{\mathrm{Var}(\log x_t)\}^2$

$\hat{\alpha}_1$ ないし $\hat{\alpha}_2$を求めるときの分母の $\{\mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t})\}^2$ は，

$\{\mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t})\}^2$

$=[E\{\eta_{n_1}(\log x_{t-1}-\mu)\}\{\eta_\phi(\log x_t-\mu)+(1-\eta_\phi)(\log x_{t-1}-\mu)\}]^2$

$=[E\{\eta_{n_1}\eta_\phi(\log x_{t-1}-\mu)(\log x_t-\mu)+\eta_{n_1}(1-\eta_\phi)(\log x_{t-1}-\mu)^2\}]^2$

$=[\eta_{n_1}\eta_\phi\mathrm{Cov}(\log x_{t-1},\log x_t)+\eta_{n_1}(1-\eta_\phi)E\{(\log x_{t-1}-\mu)^2\}]^2$

$=\eta^2_{n_1}(1-\eta_\phi)^2[\mathrm{Var}(\log x_{t-1})]^2$

故に，

分母$=\mathrm{Var}(x_{2t})\mathrm{Var}(x_{3t})-\{\mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t})\}^2$

$=\eta^2_{n_1}(1-2\eta_\phi+2\eta^2_\phi)\cdot[\mathrm{Var}(\log x_t)]^2-\eta^2_{n_1}(1-\eta_\phi)^2$

$\cdot[\mathrm{Var}(\log x_t)]^2=\eta^2_{n_1}\eta^2_\phi[\mathrm{Var}(\log x_t)]^2$

$\hat{\alpha}_1$ の分子は，

$\mathrm{Cov}(x_{2t},y_t)\mathrm{Var}(x_{3t})-\mathrm{Cov}(x_{2t},x_{3t})\mathrm{Cov}(x_{3t},y_t)$

$=E[\{x_{2t}-E(x_{2t})\}\{y_t-E(y_t)\}]$

$\cdot E[\{x_{3t}-E(x_{3t})\}^2]-E[\{x_{2t}-E(x_{2t})\}$

$\cdot\{(x_{3t}-E(x_{3t})\}]E[\{x_{3t}-E(x_{3t})\}$

$\cdot\{y_t-E(y_t)\}]$

$=E[\eta_{n_1}(\log x_{t-1}-\mu)\eta_{n_1}(\log x_t-\mu)]\cdot(1-2\eta_\phi+2\eta^2_\phi)\{\mathrm{Var}(\log x_t)\}-\eta_{n_1}(1-\eta_\phi)\cdot\mathrm{Var}(\log x_{t-1})\eta_\phi\eta_{n_1}\{\mathrm{Var}(\log x_t)\}=-\eta^2_{n_1}\eta_\phi(1-\eta_\phi)\{\mathrm{Var}(\log x_t)\}^2$

（最後の等式は，確率変数が独立のとき共分散がゼロ．また，i.i.d. より

を立ててみる．すなわち，新たに変数として $\log Y_{t-1}$ を加えるのである．この線形回帰方程式のそれぞれの係数を最小2乗法により求めるとそれらの推定値は

$$\hat{\alpha}_1 = -\frac{(1-\eta_\phi)}{\eta_\phi},\ \hat{\alpha}_2 = \frac{\eta_{n_1}}{\eta_\phi},\ \hat{a}_0 = \frac{1}{\eta_\phi}(\log N + \log n_1(e^\mu) - \eta_{n_1}\mu)$$

であり[6)]

$$\log Y_t \fallingdotseq \frac{1}{\eta_\phi}\{\log N + \log n_1(e^\mu) - \eta_{n_1}\mu\} - \frac{1-\eta_\phi}{\eta_\phi}\log Y_{t-1} + \frac{\eta_{n_1}}{\eta_\phi}\log\frac{p_t}{p_{t-1}}$$

となる．

ところで，この Y_{t-1} に(30)を応用し，かつ，$\log\frac{p_t}{p_{t-1}} = \log p_t - \log p_{t-1}$ には(31)をそのまま用いれば，(30)式そのものになる．

したがって，$\log Y_t - \log\hat{Y}_t = \hat{\tau} = 0$

であり，（負の）系列相関の問題は消滅し，ルーカスの言うように near perfect fit するのである．彼が near という限定を付したのは，ルーカスの証明において重要な役割を演じている(30)式は，テイラー展開として2次以上の項を省略して得られた近似式であるためであろう．しかし，回帰方程式の係数を上述のように計量経済学の最小2乗法によって求めることなどせず，確率変数を含んでいるとはいえ，理論経済学的均衡式である(28)と(29)式を出発点にして導かれたわれわれのいわゆる均衡式(30)，(31)だけを使って

$\log Y_t = \log\hat{Y}_t \fallingdotseq \frac{1}{\eta_\phi}\{\log N + \log n(e^\mu) - \eta_{n_1}\mu\} - \frac{1-\eta_\phi}{\eta_\phi}\log Y_{t-1} + \frac{\eta_{n_1}}{\eta_\phi}\log\frac{p_t}{p_{t-1}}$ を導き出せるのである．そして，$\log\frac{p_t}{p_{t-1}} = \log(1+\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}})$ はインフレ・ファクターの対数であるから，$\log\frac{p_t}{p_{t-1}}$ はインフレ率と狭義の単調増加の関係にある．他方，Y_t と $\log Y_t$ も狭義の単調増加関数の関係にあるから $\log\frac{p_t}{p_{t-1}}$ の係数が正ということはインフレ率と生産高の間のトレード・オフを示したことになる．ルーカスは彼自身の合理的予想モデルの均衡式から，しかも，

$\mathrm{Var}(\log x_{t-1}) = \mathrm{Var}(\log x_t)$ から導かれる，）

故に，

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{-\eta^2_{n_1}\eta_\phi(1-\eta_\phi)\{\mathrm{Var}(\log x_t)\}^2}{\eta^2_{n_1}\eta^2_\phi\{\mathrm{Var}(\log x_t)\}^2} = -\frac{(1-\eta_\phi)}{\eta_\phi}$$

$\hat{\alpha}_2$ の分子は，

$$\mathrm{Var}(x_{2t})\mathrm{Cov}(x_{3t}, y_t) - \mathrm{Cov}(x_{2t}, y_t)\mathrm{Cov}(x_{2t}, x_{3t})$$
$$= \eta^2_{n_1}\mathrm{Var}\{\log x_{t-1}\}\eta_\phi\eta_{n_1}[\mathrm{Var}(\log x_t)]$$
$$= \mathrm{Var}(\log x_t) = \eta^3_{n_1}\eta_\phi\{\mathrm{Var}(\log x_t)\}^2$$

かくして，

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\eta^3_{n_1}\eta_\phi\{\mathrm{Var}(\log x_t)\}^2}{\eta^2_{n_1}\eta^2_\phi\{\mathrm{Var}(\log x_t)\}^2} = \frac{\eta_{n_1}}{\eta_\phi}$$

$$\hat{\alpha}_0 = E(\mathrm{Log}\,Y_t) - \hat{\alpha}_1 E(\log Y_{t-1}) - \hat{\alpha}_2 E(\log p_t - \log p_{t-1})$$
$$= \frac{1}{\eta_\phi}\{\log N + \log n_1(e^\mu) - \eta_{n_1}\mu\}$$

7）Lucas〔18〕p.81
ルーカスは，“そのようなトレード・オフの存在に対する計量経済学的立証は現実の世界からの立証と比較してはるかに説得力がある”と言っているが，計量経済学者は，ルーカスの立証を計量経済学的立証と言わないかもしれない．

インフレーションと生産高との間にトレード・オフが存在しないように見えるモデルの均衡式から，両者の間にトレード・オフの関係を示していることに大きな自負を持っているように思える[7].

既述のように，ルーカスはあらゆる形の貨幣錯覚を除外したモデルによってフィリップス曲線の右下がりを示そうとした．そして示したと言っって良いかもしれない．しかし，すでに紹介したようにゲールは，ルーカス・モデルにおいては価格水準は人口や貨幣の状態を不完全にしか示し得ないので雑音を含む信号（noisy signal）と言わざるを得ないからルーカスのフィリップ曲線も１つのイルージョン（錯覚）によるものである，と述べていることを再び付言しておこう[8].

一般に合理的予想学派は実際の経済現象も自らの均衡モデルによる均衡解が実現したものと見做して良いと考えているとわれわれに解させるものがある．果たしてそのように見做してよいか大いに問題があろう．他方，ルーカスがフィリップス曲線を導出したとする例えば（31″）を適用するとき，特に現実の政策に応用して検証する際には既述のわれわれの言葉を想起してほしい[9].

7．kパーセント・ルールの貨幣政策

貨幣拡大率を一定値kに固定する貨幣政策は，フリードマンによって，kパーセント・ルールと呼ばれ，マネタリズムと非マネタリズムの学者によってその是非をめぐって論争が生じた．フリードマンがkパーセント・ルールを唱導する理由には単に経済理論上の問題だけではなく，変動し易い貨幣拡大率は政治・社会の階層や圧力団体の利害に左右され恣意的なものになってしまうということにもあった．これは，重要な論点ではあるが，ここでは，ルーカスにしたがってkパーセント・ルールの下での競争はパレート最適（Pareto-optimal）配分すなわちパレート効率（Pareto-efficient）をもたらすということを紹介しよう．

ルーカスによれば，確率密度関数を単一の点に集中するということが，貨幣の拡張率を一定のkパーセントに固定することに対応するのであるとしている．いわゆるkパーセント・ルール以外の貨幣政策とはある一定の平均値をめぐって貨幣量のランダムな変動をすることを意味しているのであるとしている．そして，ルーカスは，「kパーセント・ルールについてのいかなる批判家も，だからと言ってその代わりにランダムな政策を唱えているわけでないから，自分達に使用可能な制限された範囲において貨幣政策の研究を追求することにほとんど関心を持っていない」という趣旨のことを述べて彼の合理的予想モデルによってkパーセント・ルールを検討するのである．ところで，kパーセントの貨幣量の拡張は，人口増加，技術進歩を含む経済の成長の際のものであり，人口・技術が一定な場合は$k=1$であり，そして，恒等的

8）Gale〔7〕p.68．このことは本論文においてすでに紹介している．
9）本論文30ページ参照．

に$x=1$であることを意味している．そして，$x=1$であるときはヤング一人当たりの均衡生産量＝雇用量$n(\frac{\lambda}{p})$，均衡消費量$c(\frac{\lambda}{p})$は，貨幣の需給均衡，均衡価格関数を前提にすれば，それぞれ$\tilde{n}(\theta)$，$\tilde{c}(\theta)$として示すことができる．

そして，この主体が，自分が生産した生産物を自分で消費した残りを価格pでオールドに売ろうとすれば，そのことは，1つの島で，

$$\lambda = p(\tilde{n}(\theta)-\tilde{c}(\theta))$$

だけヤング一人当たり貨幣を需要することを意味する．今，1つの島のヤングの総人口が$\frac{N}{2}\theta$であるから，ヤングの総貨幣需要量は，$\frac{N}{2}\theta p(\tilde{n}(\theta)-\tilde{c}(\theta))$であり，他方，オールドのそれに対応する，総貨幣供給量は$\frac{N}{2}m$である．そして，貨幣の市場均衡は，

$$\frac{N}{2}m = \frac{N}{2}\theta p(\tilde{n}(\theta)-\tilde{c}(\theta)) \qquad (※)$$

であり，同じことであるが，

$$\frac{m}{p} = \theta(\tilde{n}(\theta)-\tilde{c}(\theta))$$

である．この右辺は均衡におけるオールド一人当たりの現在の消費量である．これを$\tilde{c}^1(\theta)$で表す[1)]．

すなわち，$\tilde{c}^1(\theta) = \theta\{\tilde{n}(\theta)-\tilde{c}(\theta)\}$である．ここで注釈を加えるならば，オールド一人当たりの消費量と言っても，これは，あくまで平均としての一人当たりの消費量であり，実際にその消費量に対応する個人が実在しないかも知れないのである．先に，ヤングがオールドになるとき，双方の島の一人当たりの貨幣量をmとするように人口を再配分し，そのとき貨幣の所有権をそのままにして一方の島から他方の島に人口を移動させると言ったが，そのとき，島では貨幣量をより多く持っている人もより少なく持っている人もいるのであり，とにかく双方の島では一人当たりにすれば所有する貨幣量はmとなるように人口の再配分をするのである．しかし，平均としての一人当たりの消費量であるということは，議論の展開には本質的に影響を与えないから，このまま考察を進める．

さて，1つの島での生産物の需給の均衡は

$$\frac{N}{2}\tilde{c}^1(\theta) = N\frac{\theta}{2}\{\tilde{n}(\theta)-\tilde{c}(\theta)\}$$

で，これより，$\dfrac{\frac{N\tilde{c}^1(\theta)}{2}}{N\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\tilde{c}^1(\theta)}{\theta} = \tilde{n}(\theta)-\tilde{c}(\theta)$ (※※)

である．したがって，$\frac{\tilde{c}^1(\theta)}{\theta}$は1つの島でのオールドの総消費量をその島のヤングの総人口

1）ルーカスの記号は$c'(\theta)$となっているが，この記号ではヤング一人当たり次期の消費と混同するおそれがあるので$\tilde{c}^1(\theta)$とした．

で割ったものであるから$\frac{\tilde{c}^1(\theta)}{\theta}$はヤング一人当たりが支えているオールド一人当たりの消費量なのである.

ところで，上記（※）式より，他方，$p = m\phi(\frac{1}{\theta})$ を考慮すれば,

$$\frac{m}{\theta} = m\phi(\frac{1}{\theta})(\tilde{n}(\theta) - \tilde{c}(\theta)) = m\phi(\frac{1}{\theta})\frac{\tilde{c}^1(\theta)}{\theta}$$

$$\phi(\frac{1}{\theta})\tilde{c}^1(\theta) = 1 \qquad (※※※)$$

が成立する．ここで，kパーセント・ルールにより，かつ，ルーカスの均衡モデルから導かれた経済的結果の効率を，他の別なしかも非市場的配分を含む経済的結果と比較してみよう．いま，現在に関連するものと将来に関連するものとを区別して単にθとθ'の表記を用いることにする．他方，(※※）式は均衡条件より導かれたものであるが，パレート最適すなわちパレート効率の通常の定義に準じて消費可能領域として

$$c(\theta) + \frac{1}{\theta}c^1(\theta) \leqq n(\theta), \qquad c(\theta) \geqq 0,\ n(\theta) \geqq 0,\ c^1(\theta) \geqq 0 \qquad (32)$$

を考えよう．そのとき，パレート最適すなわちパレート効率の定義は，(32)を満たし他方，つぎの不等式において，$\theta \in [\varepsilon, 2-\varepsilon]$ について，等号はともかく(33)あるいは(34)の双方はもち論何れかにおいて,

$$U[c(\theta), n(\theta)] \geqq U[\tilde{c}(\theta), \tilde{n}(\theta)] \qquad (33)$$

$$c^1(\theta) \geqq \tilde{c}^1(\theta) \qquad (34)$$

が厳密な不等式が成り立たせるような$c(\theta), n(\theta), c^1(\theta)$ が存在しないとき$\tilde{c}(\theta), \tilde{n}(\theta)$, $\tilde{c}^1(\theta)$ はパレトー最適すなわちパレート効率である．しかし，以上のようなルーカスのパレート最適すなわちパレート効率の定義は，ミュンヒ [24] やアザリアデス [2] によって論議の対象になったものであるが，ここではルーカスの定義に従って行う.

定理5 kパーセント・ルールのとき，そして人口・技術が一定のときは，$x = 1$ において，ルーカス・モデルの均衡では，$\tilde{c}(\theta), \tilde{n}(\theta), \tilde{c}^1(\theta)$ はパレート最適すなわちパレート効率である.

証明 まず，今までの展開より

$\lambda = \frac{m}{\theta} = \frac{m}{\theta}\phi(\frac{1}{\theta})\tilde{c}^1(\theta)$ は明白である．他方，ルーカス・モデルの解は最適解であるから,

$$\underset{c,n,\lambda}{\text{Max}}\left\{U(c,n) + \int V\left[\frac{\lambda}{m\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]g(\theta')d\theta'\right\}$$

$$\text{subject to}\quad m\phi(\frac{1}{\theta})(n-c) - \lambda \geqq 0$$

であるはずである．ただし，既述のようにθ'はθに対して翌期のものである．先の$\tilde{c}(\theta), \tilde{n}(\theta)$はもちろん，そしてまた，上式を最大にしている$\lambda$も最適解である．この$\lambda$を$\tilde{\lambda}(\theta)$ としておこう．そのとき

$$U(\tilde{c}(\theta),\tilde{n}(\theta))+\int V\left[\frac{\tilde{\lambda}(\theta)}{m\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]g(\theta')d\theta'$$

$$=U(\tilde{c}(\theta),\tilde{n}(\theta))+\int V\left[\frac{\frac{m}{\theta}}{m\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]g(\theta')d\theta'$$

$$=U(\tilde{c}(\theta),\tilde{n}(\theta))+\int V\left[\frac{1}{\theta\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]g(\theta')d\theta'$$

$$=U(\tilde{c}(\theta),\tilde{n}(\theta))+\int V\left[\frac{\phi(\frac{1}{\theta})\tilde{c}^1(\theta)}{\theta\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]g(\theta')d\theta'$$

である．他方，(32)より，

$$\tilde{n}(\theta)-\tilde{c}(\theta)=\frac{\tilde{\lambda}(\theta)}{p}\geqq\frac{c^1(\theta)}{\theta},$$

$$\frac{p}{m\phi(\frac{1}{\theta'})}(\tilde{n}(\theta)-\tilde{c}(\theta))=\frac{\tilde{\lambda}(\theta)}{m\phi(\frac{1}{\theta'})}\geqq\frac{m\phi(\frac{1}{\theta})c^1(\theta)}{\theta m\phi(\frac{1}{\theta'})}=\frac{\phi(\frac{1}{\theta})c^1(\theta)}{\theta\phi(\frac{1}{\theta'})}$$

したがって，この $\dfrac{\phi(\frac{1}{\theta})c^1(\theta)}{\theta\phi(\frac{1}{\theta'})}$ はヤングがオールドのとき消費可能な量である．それ故，最適解と他の解との関係より，

$$U(\tilde{c}(\theta),\tilde{n}(\theta))+\int V\left[\frac{\phi(\frac{1}{\theta})\tilde{c}^1(\theta)}{\theta\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]g(\theta')d\theta'\geqq U(c(\theta),n(\theta))$$
$$+\int V\left[\frac{\phi(\frac{1}{\theta})c^1(\theta)}{\theta\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]g(\theta')d\theta'$$

である．もし(33)が厳密に不等号で成立するとすれば，上記の式より

$$\int\left\{V\left[\frac{\phi(\frac{1}{\theta})\tilde{c}^1(\theta)}{\theta\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]-V\left[\frac{\frac{1}{\theta}\phi(\frac{1}{\theta})c^1(\theta)}{\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]\right\}g(\theta')d\theta'>0 \tag{35}$$

が成立するはずである．

他方，(34)が成立するとすれば，v が狭義単調増加関数であることから，

$$V\left[\frac{\frac{1}{\theta}\phi(\frac{1}{\theta})\tilde{c}^1(\theta)}{\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]\leqq V\left[\frac{\frac{1}{\theta}\phi(\frac{1}{\theta})c^1(\theta)}{\phi(\frac{1}{\theta'})}\right]$$

である．しかし，これは(35)に矛盾する．他方，(34)が厳密に不等式で成立すれば，同じようにし

て(33)は厳密な不等式では成立し得ないことは容易に示すことができる．

したがって，$(\tilde{c}(\theta), \tilde{n}(\theta), \tilde{c}^1(\theta))$ はパレート最適すなわちパレート効率である．

以上の証明を見ても分かるように，オールド一人当たりの消費量 $\tilde{c}^1(\theta)$ や $c^1(\theta)$ が明示的に示されているのであるが，あくまでヤング一人の効用すなわちヤングのときの効用とこのヤングがオールドのとき消費するであろう将来効用の和として比較検討されているのである．ときおり，ルーカスのパレート最適すなわちパレトー効率の問題について述べられるとき，ルーカスはヤングの現在効用とそのヤングの将来効用の和としているのにヤングの現在効用と現在のオールドの消費量を入れたものの和と解されることがあるが，そうでないのである．

何れにせよ，このパレート最適の議論について，ルーカスは，2つの側面を強調しておかねばならないとして，つぎのように述べている．すなわち，定理5は，kパーセント・ルールの下での確率的資源配分を，他の非確率的（また非市場的）資源配分と比較して，このkパーセント・ルールの下での確率的資源配分がパレート最適であると主張しているのであって，他の貨幣政策による確率的資源配分と比較しているのではない．これが第1の強調点である．

また，最適性についてのルーカスの議論は，経済の市場構造と情報構造を物理的与件としているのが第2の強調点である．また，ルーカスは，明らかにこの市場が費用なしに合体することができるならば，よりすぐれた資源配分が得られる，と言っているが，これに批判的な学者もいることを付記しておこう[1)]．

さて，ルーカスの既述のkパーセント・ルールが最適であるという命題に対するミュンヒの議論を簡単に紹介しつつ，われわれの私見を加えておこう．すなわち，ミュンヒは，ルーカス自身の一般均衡モデルによるこれらの結果は，若干の経済学者には，経済政策は一般に有効でないという仮説を抱かせ，他の経済学者には，最低限，政策がある意味で有効であることを示すことができる新しい枠組が見出さなければならないと結論させるに至った，と述べている[2)]．

そして，さらに例えば，「パレート最適についての強いしかし標準的な定義に関して言うならば，ルーカス均衡は，パレート最適ではない」，また例えば，「ルーカスの市場を含む広範囲の種類の現物市場（spot markets）についてはパレート最適は達成することが不可能である」，また例えば，「現物市場が先物市場と結合させられるとき，現物の価格（spot prices）が先物価格（future prices）と整合的でなければ，パレート劣位均衡，（Pareto-inferior equilibrium）の配分が起こり得る」，また，例えば，「貨幣が取引をまかなうために使用されなければならないならば，パレート最適のためには干渉主義的な金融・財政政策を必要とする」，また「裁量的な金融・財政政策が使われるならば，すなわち異なったミクロ的単位を異なって取扱うところのそれらの裁量政策が用いられれば，パレート最適は現物市場（ルーカス市場を含む）において達成することができる」，また例えば，ミュンヒが，「条件付きパレート最適（conditional

1）岩田〔13〕．

2）Muench〔24〕p.325.

Pareto-optimality）と呼び，そしてルーカスの市場とより密接に関係しているように見えるパレート最適の中間的定義についてさえ，ルーカス均衡はパレート最適でない」と言っているのである．そしてさらに，ミュンヒは，「要するに，政策は無効ではなくまた貨幣は中立的でないのであり，ただ中立的な政策と中立的貨幣がおそらく無効なのである」とさえ結論的に述べているのである．そしてミュンヒは，ルーカス・モデルについてかなり詳細に考察を加えている．それをそのまま忠実に紹介するのは，本論の課題でないから，ルーカスがミュンヒの論文について，「交代的な規準を使っての諸結果についてのミュンヒの注意深いそして教訓的な研究は，非常に有効であり，このことについての自分の不完全な取り扱いを遥かに越えていることは確かである」と評価ないし讃辞とも言えることを記していることをここで述べておこう[1)].

さらに，ミュンヒについて言及するならば，ルーカスが自分のｋパーセント・ルールの最適性について強調したい点として，これは他の例えば非市場的モデルのような非確率的体系と比較して結論づけているのであり，確率的市場体系における他のどんな貨幣政策の場合と比較しても最適であると言っているのではないという点と，ルーカスのパレート最適性の議論は経済の市場構造や情報構造を物理的与件としたときの結論であるという点を，われわれは想起する必要がある．ミュンヒのように現物市場や先物市場をモデルに導入することは，市場構造を与件とせず変化させたことになるのであり，その点からもルーカスは自分のある種の妥当性を主張しミュンヒに反論らしきことを述べても良かったのではなかろうか．少なくともルーカスのこの文献でもっぱらミュンヒの評価に終わっているのは，自らの既述のあるいは上述の２つの強調点をルーカス自身余り強く意識していなかったことと関係がないであろうか[1)]．そしてまた，ルーカスの論文が，少なからざる経済学者にとって，経済政策の非有効性の理論的支柱となったのはなぜかと考えざるを得ない．それには，ルーカスの他の論文の考究および当時のアメリカの政治経済社会の思潮との関連も検討する必要があるように思われる．ところで，フリードマンやルーカスらのいわゆる「新しい」経済学者達に対するハーンの極めて卒直な批判を紹介しておく必要がとくにあるように思われる．すなわち，「『新しい』マクロ経済学者の多くは，彼らの業績にたいする私の批判が私のケインズ信仰に基づくものと見なしていることが確からしいが，それは完全に間違いである．私が怒っているのは，『科学的な』てらいと，その上彼らが頼りにしたがる理論それ自体を不十分にしか把握していない，という事実に対してなのだ．彼らは，厳密さを欠いていること，知的な洗練さに欠けていることを，むしろ誇りにしている．…中略…．いずれにせよ，彼らの考え方は，『科学的』主張を信ずる政治家たちのあいだに浸透してしまった．このようにして彼らは，歴史上のその他の魔法使いと同じく，人間社会の営みに理性を働かせようとするプロジェクトに本当の害を与えたのである．」とルーカス達を厳しく批判している[2)].

ここでｋパーセント・ルールについてのルーカスの全く数式を用いていない論文［20］の

1）Lucas〔19〕p.352.

2）Hahn〔9〕p.164，邦訳288～289ページ．

所説を紹介しておこう．すなわち，ルーカスはつぎのように述べている．

“交代的な政策ルールに一致して注意を集中することは，自分の考えによれば，集計的政策論議にある程度の合理性を回復するための大きな進歩であるけれども，フリードマンによって唱導された特定なルール（the particular set of rules）が他のものよりも優れているということは必ずしも導かれないであろう．だが他方において，幾人の研究者は，例えば４％の貨幣成長ルールが経済のそのときの状態に反応するような金融政策より劣っていない特定の例を展開した”と言って，その幾人かの研究者の中に，サージェント，ワラス（Wallace），バローとともに，今われわれが取り挙げている論文の著者としてのルーカス自身を挙げている[3)]．そして，さらに末尾で，“金融・財政の主要な課題は，経済の民間部門に対して安定的で予測可能な環境を与えることである”と言っている[4)]．このような環境を与えるものの１つとして，ルーカスはｋパーセント・ルールを含めていると考えてよいであろう．

ところで，ルーカスやミュンヒ等はパレート最適 Pareto-optimal という語を使用しているが，周知のように，アロー＝ハーンがこの語は本来の意味以上のものに解されるおそれがあると指摘して以来，パレート効率 Pareto-efficient という語を使用する経済学者のほうが多くなった[5)]．われわれも，パレート効率の語を用いるほうが適当であると考えその配慮をしたことを付言しておきたい．

※ルーカスの結論について

ルーカスは，自分の論文はガーレイによって提起された逆説を解決するための一つの試みであったと述べている．そして，ルーカスが逆説と言っているのは，貨幣はヴェールであるが，「ヴェールが揺れるとき，実質産出量は動き出す」というフリードマンの貨幣理論についてのガーレイのマイルドであるが的確なパロディーに示されている内容を指しているのである．この逆説の解決は，ルーカスによれば，貨幣錯覚のない経済主体を前提にすることによってなし遂げられたと言うのである．また，ルーカスによれば，貨幣錯覚がないというのは，完全に表明されて周知になっている比例的貨幣的拡張というリカード派の仮説的実験はなんら実質的結果をもたらさない（すなわち貨幣はヴェールである）というたぐいのことを指すのである．ルーカスによれば，市場価格によって取引者に伝えられる情報は不完全であり，貨幣的攪乱と実物的攪乱とを区別することができないそういうフレームワークの中に合理的主体はおかれているのである．そして，このフレームワークの中で，貨幣的変動は同じ方向に実質的生産高を動かすとルーカスは説明している．

そして，ルーカス自身は，この解決に説得性をもたせるために，つぎのような意味で十分簡単なフレームワークを採用する必要があるとしている，そしてそのフレームワークというのは，それぞれの時点で各取引者にとって利用可能な情報について正確な特定化が可能であり，また

3）Lucas〔20〕p.206.

4）Lucas〔20〕pp.209～210.

5）Arrow and Hahn〔1〕p.91，邦訳98ページ．ただし，邦訳では，パレート有効としている．

各主体の行動の合理性を立証することを容易にするようなものであるとルーカスは言っている．そして，この単純性を得るために，観察された景気循環の興味ある諸特徴は1つの注目すべき例外を除いて捨象されたのであり，その注目すべき例外とは，フィリップス曲線であり，そして，このフィリップス曲線は説明されない経験的事実としてではなくて，一般均衡体系の解の中心的特徴なのである，とルーカスは述べている．

われわれが，ここで再び付言するならば，ルーカスの言う『一般均衡体系』とは，まさしく今まで述べて来たルーカス・モデルであることは言うまでもない．このルーカスらのアメリカの「新しい」経済学に対して，"経済学を「科学」とみなし，自分自身を「科学者」と呼んでいるが，言葉の背後には世界観がある"という趣旨のことをハーンが述べるとともに，"競争的一般均衡体系が不完全なものだ"と言い，その不完全な諸点を挙げていることを，ここで付記しておきたい[1)]．

結びにかえて

最後に，経済主体が確率分布を用いて予想を合理的形成する点について一言述べておこう．そもそも合理的予想形成か否かは別にしても，確かに，現代社会において確率分布を用いて予想を形成して行動することが多くなり，そしてその傾向が一層強くなるであろう．しかし，経済主体のうち家計はともかく，企業家の本質的性格については，全く違った考え方を持っている経済学者を直ちに想起することができる．例えば，シュムペーターは企業家は創造的破壊のインノベーションをその本質的職能であると述べている[2)]．また，ケインズは，「投機に基づく不安定性がない場合にも，われわれの積極的な活動の大部分は，数学的期待値—道徳的，快楽的，経済的を問わず—に依存するよりもむしろ，自生的な楽観に依存しているという人間本性の特徴に基づく不安定性が存在する．十分な結果を引き出すためには将来の長時間を要するような，なにか積極的なことをしようとするわれわれの決意のおそらく大部分は，血気（animal spirits）—不活動よりもむしろ活動を欲する自生的衝動—の結果としてのみ行われるのであって，数量的な確率を乗じた数量的利益の加重平均の結果として行われるものではない．……企業が将来の利益の正確な計算を基礎とするものでないことは，南極体験の場合とほとんど変わりがない．したがって，もし血気が鈍り，自生的な楽観が挫け，数学的期待値以外にわれわれの頼るべきものがなくなれば，企業は衰え，死滅するであろう」と明記している[3)]．

これら，シュンペーターやケインズの所説にうなずく人は多いであろう．そのとき，経済の

1）Hahn は〔9〕pp.163～164，邦訳286～288ページ参照．

2）Schumpeter〔32〕S.88～139，とくに S.110～139，邦訳（上巻）161～248ページ，とくに198～248ページ，英語版は，pp.57～94，とくに pp.74～94参照．
Schumpeter〔33〕pp.81～86，邦訳147～193ページ参照．

3）Keynes〔15〕pp.161～162，邦訳159～160ページ．

モデルは，ルーカスとは全く違ったものになるであろう．

以上のように，企業の最適行動を確率的期待値におくという問題性の他に，その企業は実は家計でもある非現実的なものである．また，すでにそれぞれ該当箇所において指摘したように，例えば，すべての個人を全く同一のものにしている点や貨幣に本来の取引機能やその他の機能を持たせていない点など批判すべき点が多いことを再度述べておこう．

以上

参 考 文 献

[1] Arrow, Kenneth J. and F. H. Hahn. *General Competitive Analysis*. Holden-Day, Inc. Edinburgh: Oliver & Boyd, 1971. 福岡正夫・川又邦雄訳『一般均衡分析』(東京．岩波書店 1976年)

[2] Azariadis, C. "A Reexamination of Natural Rate Theory." *The American Economic Review*. Vol. 71, No.5 (December, 1981): 946～960.

[3] Bernstein, B. and R. A. Toupin. "Some Properties of the Hessian Matrix of a Strictly Convex Function." *J. Reine Angew. Math.* 210 (1962): 65-72.

[4] Eatwell, J., M. Milgate and P. Newman., ed. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics. vol.3, K to P.* New York: Macmillam, Tokyo: Maruzen: 518-519.

[5] Friedman, M. *Price Theory*. Berlin・New York: Walter de Gruyter. 1962, 1976.

[6] ――――. "The Role of Monetary Policy." *American Economic Review* 58 (March, 1968): 1-17.

[7] Gale, D. *Money: In Equilibrium: The Cambridge Economic Handbooks*, Digswell Place, Welwyn: James Nisbet & Co. Ltd., Cambridge・New York: Cambridge University Press, 1982.

[8] 芳賀半次郎「ケインズと第１公準―貨幣賃金と実質賃金の相対的変動―」「研究年報『経済学』」Vol.48, No.3 (November, 1986)

[9] Hahn, F. "Autobiographical Notes with Reflections" in *Eminent Economists—Their Life Philosophies—*. Edited by M, Szenberg. Cambridge: Cambridge university Press, 1992.
都留重人監訳『現代経済学の巨星―自らが語る人生哲学―（下)』(東京 岩波書店 1994年)

[10] 伊藤清三『ルベーク積分入門』(東京，裳華房，1963，1992)

[11] 岩田恒一「Lucas のマクロ・モデルの構造―貨幣の中立性定理（Ｉ）―」
「研究年報『経済学』」vol. 52, No.1 (July, 1990): 41-48

[12] ――――.「Lucas のマクロ・モデルにおける均衡―貨幣の中立性定理（Ⅱ）―」
「研究年報『経済学』」Vol. 53, No.1 (July, 1991): 17-26

[13] ――――.「Lucas のマクロ・モデルに内在する特性―貨幣の中立性定理（Ⅲ）―」未公刊

[14] 亀谷俊司『解析学入門』(東京 朝倉書店 1974年)

[15] Keynes, J. M. *The General Theory of Employmet, Interest and Money. Vol.7 of The Collected Writings of John Maynard Keynes.* London and Basingstoke: The Macmillan Press, 1973. 1st ed, 1936.
塩野谷祐一訳『雇用・利子および貨幣の一般理論』,『ケインズ全集 第７巻』(東京 東洋経済新報社 1983年)

[16] **Колмогоров А. Н. и С. В. Фомин. Злементы теории Функций и Функционального анализа, ИЗДАНИЕ ЩЕСТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ:** (Mockba. 《Hayka》 1989)
『関数の理論と関数解析の基本』が原題名で1989年の改訂第６版であるが，邦訳として山崎三郎，柴岡泰光共訳で，コルモゴロフ＝フォーミーンの『函数解析の基礎 原書第４版上』(東京 岩波書店 1979年) がある．

[17] Lang, Harald. "Expectations and the Neutrality of Money: A Comment." *Journal of Economic Theory* 36 (August, 1985): 392-393.

[18] Lucas, Robert, E, Jr. "Expectations and the Neutrality of Money" in *Studies in Business-Cycle Theory* by Lucas, R. E. Jr. Cambridge and London: The MIT Press, 1986.: 66-89.
原論文は *Journal of Economic Theory* 4 (April, 1972): 103-124.

[19] ———. "Reply to Muench and Polemarchakis and Weiss", *Journal of Economic Theory,* vol 15 (August, 1977): 351-352.

[20] ———. "Rules, Discretion, and the Role of the Economic Advisor," in *Rational Expectations and Economic Policy* Edited by Fisher. S. Chicago: University of Chicago Press, 1980: 199-210.

[21] ———. "Corrigendum." *Journal of Economic Theory* 31 (October, 1983): 197-199.

[22] ———. *Models of Business Cycles.* Oxford: Basil Blackwell, 1987, 清水啓典訳『マクロ経済学のフロンティアー景気循環の諸モデル―』(東京 東洋経済新報社 1988年)

[23] Mangasarian, O. L. *Nonlinear Programming.* New York: McGraw-Hill. 1969, 関根智明訳『非線形計画法』(東京 塔風館 1972)

[24] Muench, Thomas J. "Efficiency in a Monetary Economy—Optimality, the Interaction of Spot and Futures Markets, and the Nonneutrality of Money in the Lucas Model—". *Journal of Economic Theory* 15, (August, 1979) 325-344.

[25] Muth, J, F. "Rational Expectations and the Theory of Price Movements" *Econometrica* 29 (July, 1961): 315-335.

[26] Okun, A.M. "Potential GNP: Its Measurement and Significance," *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section,* Washington, D.C. : American Statistical Association, 1962.

[27] ——. "Unemployment and Output in 1974." *Brookings Papers on Economic Activity.* Washington, D.C. Brookings Inst., 1974.

[28] Patinkin, D. "Neutrality of Money" in *The New Palgrave: A Dictionary of Economics Volume* 3, *K to P.* New York: Macmillan, Tokyo: Maruzen, 1987.

[29] Phelps, E.S. *Microeconomic Foundations of Employment and Inflation Theory,* New York: Norton, 1970.

[30] Phillips, A.W., "The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861-1957." *Economica,* Vol.25 (November, 1958): 283-299.

[31] Samuelson, P.A. "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money". *Jouonal óf Political Economy* 66. (December, 1958)

[32] Schumpeter, J. A. *Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung.* München und Leipzig: Verlag von Duncker & Humblot, 1926 塩野谷祐一・中山伊知郎・東畑精一訳『経済発展の理論（上)』(東京 岩波文庫 1977年) . *The Theory of Economic Development.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. 1934.

[33] ———. *Capitalism, Socialism, and Democracy.* London: George Allen & Unwin Ltd. 4th ed. with a new chapter (5th impression), 1954. 中山伊知郎・東畑精一訳『資本主義・社会主義・民主主義（上巻)』(東京 東洋経済新報社 1962年)

[34] Stokey, N.I. and Robert E. Lucas, Jr. with Edward C. Prescott. *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Cambridge, Massachusetts, and London, England: Harvard University Press 1989: 49-52

「補 注」

$V'(\frac{\theta'}{\theta}\frac{z'}{\phi(z')})$, $V''(\frac{\theta'}{\theta}\frac{z'}{\phi(z')})$ を V', V'' と略記する.

$$\frac{zG'(z)}{G(z)}=\frac{-z\int_{\Omega}[V''\frac{\theta'}{\theta}\frac{z'}{\phi(z')}+V']\frac{-\theta'}{\theta^2}\frac{z'}{\phi(z')}H(z',\theta')dz'd\theta' F_z(\theta:z)d\theta}{\int_{\Omega}V'\frac{\theta'}{\theta}\frac{z'}{\phi(z')}H(z',\theta')dz'd\theta'\bar{H}(\theta:z)d\theta}$$

$$= \frac{\int_\Omega V' \frac{\theta'}{\theta} \frac{z'}{\phi(z')} \frac{1}{V'} [V'' \frac{\theta'}{\theta} \frac{z'}{\phi(z')} + V'] H(z', \theta') \bar{H}(\theta : z) \frac{zF_z(\theta : z)}{\theta \bar{H}(\theta : z)} dz' d\theta' d\theta}{\int_\Omega V' \frac{\theta'}{\theta} \frac{z'}{\phi(z')} H(z', \theta') \bar{H}(\theta : z)\, dz' d\theta' d\theta}$$

ところで, $0 < \frac{1}{V'} [V'' \frac{\theta'}{\theta} \frac{z'}{\phi(z')} + V'] < 1$

$$0 < \frac{zF_z(\theta : z)}{\theta \bar{H}(\theta : z)} < 1$$

が示されたから

$$< \frac{\int_\Omega V' \frac{\theta'}{\theta} \frac{z'}{\phi(z')} H(z', \theta') \bar{H}(\theta : z)\, dz' d\theta' d\theta}{\int_\Omega V' \frac{\theta'}{\theta} \frac{z'}{\phi(z')} H(z', \theta') \bar{H}(\theta : z)\, dz' d\theta' d\theta} = 1$$

故に $0 < \frac{zG'(z)}{G(z)} < 1$

他はルーカス, 岩田に従う.