資産選択とライフサイクル（計算経済学の研究その25）

Asset Selection and Life Cycle

釜　　国男*
Kunio KAMA

日本を含む先進各国において資産格差の拡大傾向が見られる。その一つの理由として挙げられるのは富裕層の保有する金融資産の増加である。Kuhn, Schularick and Steins (2019) によると、米国では資産価格、とりわけ株価の上昇が資産の増加をもたらしている[1)]。株価が上昇しなかった場合、1998年の上位10%のシェアは61%で、2016年は71%であったと推計される。実際のシェアは69%と74%に達している。この事実は株価の変動が資産格差の重要な要因であることを示唆している。したがって格差問題の研究では、資産価格を内生化したモデルを用いる必要がある。しかも取引参加者の異質性を考慮しなければならない。さらに資産分布には年齢的な偏りが見られる。こうした理由から、異質的世代重複モデル（Heterogeneous Overlapping Generations Model）は有望なアプローチと考えられる。本稿では世代重複型のシドラウスキーモデルを分析する[2)]。最初に所得が外生的に与えられる場合について検討する。消費者は消費・貯蓄の決定に加えて、資本と貨幣に関する資産選択を行う。次に生産活動を含むようにモデルを拡張する。現役世代は保険料を支払い、退役世代は年金を受け取る。完全積立方式の年金制度についても検討する。最後に労働供給を内生化した場合について議論する。

1．モデルの構造

世代重複モデルの枠内で資産選択の問題について考える。各世代は同じ規模の人口を擁し、全人口は1に基準化する。消費者はつぎの目的関数を最大化する。

$$\max_{\{c_t, m_t\}\geq 0} \quad E_0\left[\int_0^T e^{-\rho t}u(c_t, m_t)dt + e^{-\rho T}\phi(a_T)\right] \tag{1}$$

ここで c_t は消費、m_t は実質貨幣残高、a_T は死亡時の資産である。予算制約は

$$dk + dm = (wz + rk + x - c - \pi m)dt \tag{2}$$

* 創価大学名誉教授

と表される。k は資本ストックを表し、π はインフレ率、w は実質賃金、z は労働効率、r は実質利子率、x は政府による移転支払である。総資産を a とすると

$$da = (ra + wz + x - c - Rm)dt$$

となる。$R = \pi + r$ は名目利子率であり、$(\pi + r)m$ は貨幣を保有することで失われる利子収入である。資本と貨幣が負となるのを避けるために、$a \geq a_{\min} \geq 0$ とする。また数値計算の必要上、資産に上限を設けて $a \leq a_{\max}$ とした。労働効率はつぎの拡散過程に従う。

$$dz_t = \theta(\mu - z_t)dt + \sigma dW_t \quad , \quad z_t \in [z_1, z_2]$$

ただし、W_t は標準ブラウン運動である。

上の最適化問題に動的計画法を適用すると、HJB 方程式は

$$\rho V(a,z,t) = \max_{c,m}\left\{u(c,m) + V_a(a,z,t)(ra + wz + x - c - Rm) + V_z(\theta(\mu - z)) + \frac{\sigma^2}{2}V_{zz}(a,z,t) + V_t(a,z,t)\right\} \quad (3)$$

と表される。ここで $V(a,z,t)$ は価値関数を表す。消費と貨幣の最適条件は

$$u_c(c,m) = V_a(a,z,t) \quad (4)$$

$$u_m(c,m) = RV_a(a,z,t)$$

である。これより

$$u_m(c,m) = Ru_c(c,m) \quad (5)$$

が成り立つ。消費と貨幣は資産と労働効率の関数であり、$c(a,z,t)$ および $m(a,z,t)$ と表記する。貯蓄は

$$s(a,z,t) = ra + wz + x - c - Rm$$

で与えられる。資産が下限に等しく $a = a_{\min}$ であるとき、$s \geq 0$ でなければならない。$s = 0$ とすれば

$$ra_{\min} + wz + x - c(a_{\min},z,t) - Rm(a_{\min},z,t) = 0 \quad (6)$$

となる。(5) と (6) 式を満たす消費と貨幣を求めて (4) に代入すると、$V_a(a_{\min},z,t)$ が得られる。$V_a(a_{\max},z,t)$ も同じようにして求める。

定常状態における状態変数の分布を $g(a,z,t)$ とする。これはつぎのコルモゴロフ方程式を満たす。

$$g_t(a,z,t) = -\partial_a(s(a,z,t)g(a,z,t)) - \partial_z(\theta(\mu - z)g(a,z,t)) + \frac{\sigma^2}{2}g_{zz}(a,z,t) \quad (7)$$

加えて規格化の条件

$$\int_{z_1}^{z_2}\int_0^{\infty} g(a,z,t)dadz = 1 \quad (8)$$

も満たさなければならない。第 T 世代については

$$g(a,z,0) = g(a,z,T)$$

が成り立つ。つまり遺産相続により、第0世代と第 T 世代の状態変数の分布は等しくなる。

代表的企業は資本と労働を用いて財・サービスを生産する。生産関数は $F(K,L)$ であり、労働は $L = 1$ に固定されている。完全競争の下での利潤最大化の条件は

$$r = F_K(K,1) - \delta \tag{9}$$
$$w = F_L(K,1)$$

である。資本ストックは

$$K = \frac{1}{T}\int_0^T\int_{z_1}^{z_2}\int_0^\infty k(a,z,t)g(a,z,t)dadzdt \tag{10}$$

で与えられる。貨幣市場は貨幣の需要と供給が等しいときに均衡する。つまり

$$\frac{M}{p} = \frac{1}{T}\int_0^T\int_{z_1}^{z_2}\int_0^\infty m(a,z,t)g(a,z,t)dadzdt \tag{11}$$

競争均衡は (3),(7),(9),(10),(11) 式を満たす $V(a,z,t)$, $g(a,z,t)$, K, M/p, r, w により定義される。数値計算ではつぎの効用関数と生産関数を用いた。

$$u(c,m) = \frac{(c^\gamma m^{1-\gamma})^{1-\eta} - 1}{1-\eta} \quad ,\ (0<\gamma<1, \eta>0)$$

$$F(K,L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}\ ,\ (0<\alpha<1) \tag{12}$$

実質利子率と実質賃金は

$$r = \alpha AK^{\alpha-1} - \delta \tag{13}$$
$$w = (1-\alpha)AK^\alpha$$

となる。また消費と貨幣保有量は

$$c = \left[\frac{\gamma Q^{(1-\gamma)(1-\eta)}}{V_a}\right]^{\frac{1}{\eta}}$$

$$m = Qc \tag{14}$$

$$Q = \frac{1-\gamma}{\gamma R}$$

で与えられる。名目利子率が高くなると貨幣需要は減少する[3)]。この式と (6) 式から下限の資産では

$$c = \gamma(ra_{\min} + wz + x)$$
$$V_a = rQ^{(1-\gamma)(1-\eta)}c^{-\eta}$$

となる。また上限の資産では

$$c = \gamma(ra_{\max} + wz + x)$$
$$V_a = \gamma Q^{(1-\gamma)(1-\eta)}c^{-\eta}$$

差分法によって HJB 方程式を満たす価値関数を求めた。資産の区間を I 等分して分点を $a_i (i=1,\dots,I)$ とする。分点の間隔は $\Delta a = (a_{\max} - a_{\min})/I$ である。労働効率についても、$\Delta z = (z_{\max} - z_{\min})/J$ の間隔で分点 $z_j (j=1,\dots,J)$ をとる。年齢は t_h, $h=1,\dots,N$ で近似する。$V_{i,j,h}$ で $V(a_i,z_j,t_h)$ を近似して、つぎの式を収束条件が満たされるまで繰り返し計算する。

$$\frac{V_{i,j,h}^{n+1}-V_{i,j,h}^{n}}{\Delta}+\rho V_{i,j,h}^{n+1}=u(c_{i,j,h}^{n},m_{i,j,h}^{n})+\partial_{k}V_{i,j,h}^{n+1}((k_i z_j-c_{i,j,h}^{n})/p)+\partial_{z}V_{i,j,h}^{n+1}(\theta(\mu-z_j))+\frac{\sigma^2}{2}\partial_{zz}V_{i,j,h}^{n+1}+\frac{V_{i,j,h}^{n+1}-V_{i,j,h}^{n}}{\Delta t} \tag{15}$$

ここで

$$c_{i,j,h}^{n}=\left[\frac{\gamma Q^{(1-\gamma)(1-\eta)}}{\partial_a V_{i,j,h}^{n}}\right]^{\frac{1}{\eta}}$$

$$m_{i,j,h}^{n}=Qc_{i,j,h}^{n}$$

である。(15) は行列を用いて

$$\rho V^{n}=u^{n+1}+A^{n+1}V^{n}+\frac{1}{\Delta t}(V^{n+1}-V^{n}) \tag{16}$$

と表される。A^{n+1} は離散化した a_t と z_t の遷移行列であり、V^n は $V_{i,j,h}^{n}$ を要素とするベクトルである。(16) は $\phi(a_T)$ を初期条件として時間を逆向きにして解く。

つぎに年齢 t_h 世代の資産と労働効率の分布を $g_{i,j}^{h}$ で近似すると

$$\frac{g^{h+1}-g^{h}}{\Delta t}=(A^{h})^{T}g^{h+1}$$

が成り立つ。これより

$$g^{h+1}=(I-\Delta t(A^{h})^{T})^{-1}g^{h} \tag{17}$$

となる。こんどは $g_{i,j}^{0}=g(a_i,z_j,0)$ を初期値として，時間を正の方向に進めて $g_{i,j}^{h}$ を求める。

つぎの手順で均衡解を求めた。

［ステップ 1］資本ストックと貨幣の初期値 K_0, $(M/p)_0$ を与える。

［ステップ 2］(13) 式から r_0 と w_0 を計算する。

［ステップ 3］HJB 方程式とコルモゴロフ方程式から $m_0(a,z)$ と $g_0(a,z)$ を求める。

［ステップ 4］$k=a-m_0(a,z)$ として

$$K_0^{*}=\Delta t\times\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}k_{i,j}g_0(a_i,z_j)\Delta a\Delta z/T$$

$$(M/p)_0^{*}=\Delta t\times\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}m_0(a_i,z_j)g_0(a_i,z_j)\Delta a\Delta z/T$$

を計算する。$|K_0^{*}-K_0|\le\varepsilon$ & $|(M/p)_0^{*}-(M/p)_0|\le\varepsilon$ ならば終了する。そうでなければ

$$K_1=\lambda K_0+(1-\lambda)K_0^{*}$$

$$(M/p)_1=\lambda(M/p)_0+(1-\lambda)(M/p)_0^{*}$$

としてステップ 2 へ戻る。

解に近い良い初期値を与えると少数回反復しただけで収束し、世代数を増やしても計算時間はあまり変わらない。

2. 計算結果

T = 80 で各世代の人口は 1/80 とする。パラメータは $\rho = 0.05, \gamma = 0.6, \eta = 2, A = 1, \alpha = 0.36, \delta = 0.05, \theta = 0.8, \mu = 1, \sigma = 0.2$ とした。貨幣増加率（インフレ率）は $\pi = 0.04$ に設定する。$0 \le a \le 20, 0.5 \le z \le 1.5$ の区間に 100 と 50 の分点をとる。$N = 160, \Delta t = 0.5$ であり経済は 160 世代から構成される。前節のアルゴリズムを実行すると、均衡利子率は $r^* = 7.12\%$ となる。また資本ストックは $K^* = 5.478$ であり、実質貨幣残高は $(M/p)^* = 9.734$、実質賃金は $w^* = 1.181$、総消費は $C^* = 1.590$ となる。図1は世代ごとにいくつかの集計量を示している。消費は年齢とともに増加し、60歳を過ぎると一段と増加する。貯蓄の取り崩しがこれを可能としている。各世代は同じ人口を擁するので、高齢になるほど多く消費することがわかる。計算結果は、若年期の貯蓄を老年期に取り崩すという消費のライフサイクル仮説と整合的である。貯蓄の動きを反映して、総資産も 60歳前後でピークに達する。最後の図は資本ストックの動きを示している。明らかに資本は総資産と同じパターンに従って変化する。

異質的主体モデルの優れた点は格差問題を分析できることである。現在のモデルでも労働効率の違いにより資産や所得の格差が生じる。これらの格差は年齢によって異なる可能性がある。そこで世代ごとに資産についてジニ係数を計算すると、最終世代は 0.169 で最も高く、最も低いのは第119世代の 0.035 である。どの世代も 0.2 より低く、取り立てて問題にするほどではない。ただし後で示すように、インフレ率が高くなると格差は急激に拡大する。図2は消費の policy function である。図から分かるように、労働効率は消費にほとんど影響せず、もっぱら資産が消費を決定している。貨幣需要と消費の間には $m = 5.994c$ という関係がある。このため消費関数と同じ形の関数となる。元のシドラウスキーモデルでは、長期的に貨幣の中立性が成り立つ。しかし現在のモデルでは貨幣は長期的にも実質効果を持つ。この点を数量的に示すために、貨幣増加率を変えて計算した（表1）。貨幣増加率が高くなると、投資の拡大で資本は増加して消費も増える。インフレで購買力の低下した貨幣に代わって資本が保有されるからである（トービン効果）。資本の増加で実質賃金は上昇して実質利子率は低下する。しかし実質利子率の低下は限定的で、フィッシャー効果により名目利子率は大幅に上昇する。またインフレは実質貨幣残高を減少させる。このため資本ストックは増加するものの、総資産は減少する。貨幣供給が増えると、政府の実質移転支払は大きくなる。また資産格差は拡大するが、問題となるほどではない。貨幣の増加にともなうインフレは経済に様々な影響を与える。それらは最終的に効用の変化となって現れる。この点を調べるために、第 t 世代の効用をつぎのように定義した。

$$U(t) = \int_{z_1}^{z_2}\int_{0}^{\infty} u(c(a,z,t), m(a,z,t))g(a,z,t)\,da\,dz \tag{18}$$

計算結果によると、インフレによってすべての世代で効用は低下する。例えば $U(0)$ は $\pi = 0.04$ のときは 0.534 で、$\pi = 0.15$ になると 0.485 に低下する。消費の拡大効果を貨幣の減少が相殺する

からである。

全要素生産性は、経済パフォーマンスを決定する最も重要な要因である。何らかの理由で、全要素生産性が 1.2 に上昇したとする。理論的に予想される通り、経済パフォーマンスは改善する。すなわち新しい定常状態において資本ストックと消費は増加し、実質賃金は上昇して資産格差は縮小する。これを反映してすべての世代で効用は高くなる。

先進国の政府は税制を通じた所得再分配政策を実施している。現在のモデルを用いて再分配政策の効果を調べてみよう。政府は賃金に課税して税収を高齢者に分配する。60歳で退職した後は年金を受け取る。現役時代は 1 単位の労働を供給して税金（保険料）を支払う。退職前と退職後で予算制約は異なる。現役時代の予算制約式は

$$da = ((1-\tau)wz + ra - c - Rm)dt \tag{19}$$

である。退職後は

$$da = (ra + b - c - Rm)dt \tag{20}$$

となる。ここで b は退職前の賃金と無関係に支給される年金である。$b = 3\tau w$ であれば、支給総額と税収は等しくなる。税率を $\tau = 0.3$ に固定して、年金額は賃金に連動して調整される。モデルの解を求めると、$K^* = 6.185$, $w^* = 1.233$, $r^* = 6.22\%$, $b = 0.370$ となる。年金の無い場合と比べて資本は増加し、実質利子率は低下して実質賃金は高くなる。税率を $\tau = 0.5$ まで引き上げると、$K^* = 5.967$, $w^* = 1.218$, $r^* = 6.47\%$, $b = 0.609$ となる。したがって年金制度の拡充は資本ストックと生産の減少をもたらす。これは老年期の年金が若年世代の貯蓄を減らすためである[4)]。

一部の国は積立方式を採用している。これは一種の貯蓄プログラムであり、若年期の貯蓄で資産を購入し、老年期に元本と収益を受け取る。積立方式は実質的に強制貯蓄であり、政府の定めた貯蓄額が自発的な貯蓄額を上回る場合だけ意味がある。現在のモデルを用いて積立方式の経済効果を調べてみよう。自発的な貯蓄が強制貯蓄 $fs = 0.5$ を上回るときはそのまま貯蓄を行う。下回るときは不足分を追加貯蓄する。図3 は年金が有るときと無いときの貯蓄を比較している。現役世代の自発的な貯蓄は強制貯蓄を下回っており年金政策は有効に機能している。均衡状態において $K^* = 6.237$, $w^* = 1.237$, $r^* = 6.16\%$ となり、年金の無いときより資本は増加して、実質利子率は低下し実質賃金は上昇する。資産のジニ係数は一段と低くなる。

図１　世代別の集計値

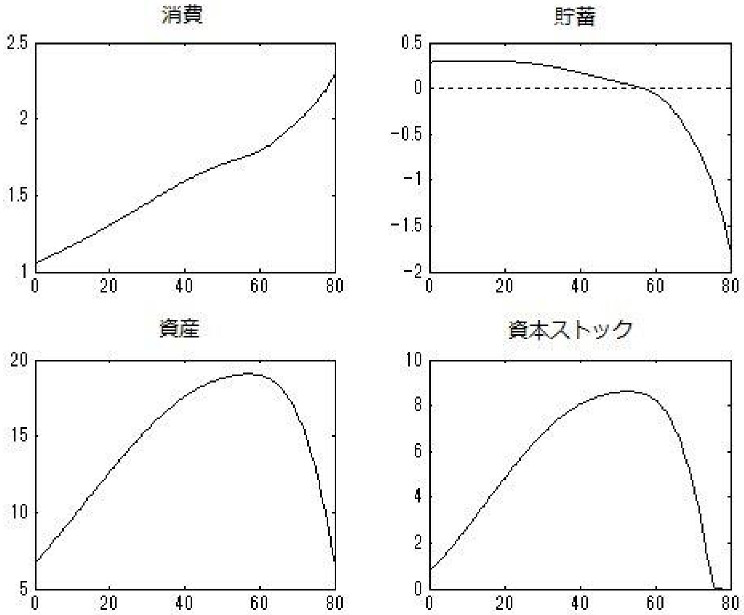


図２　消費の policy function

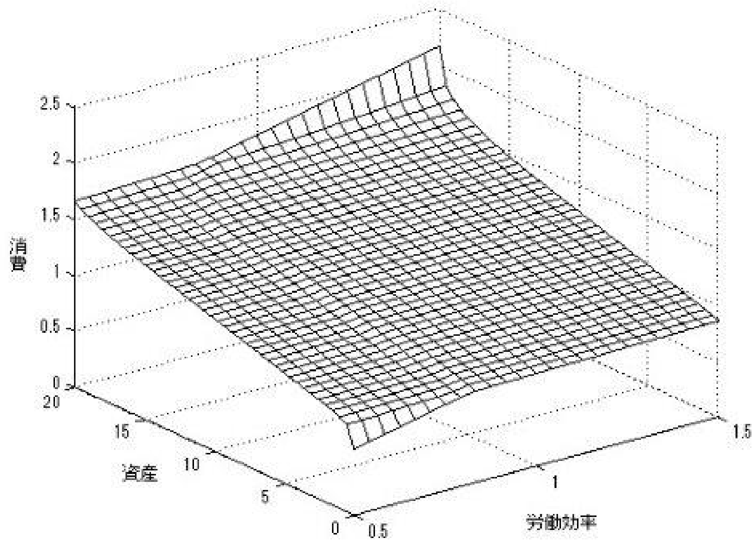
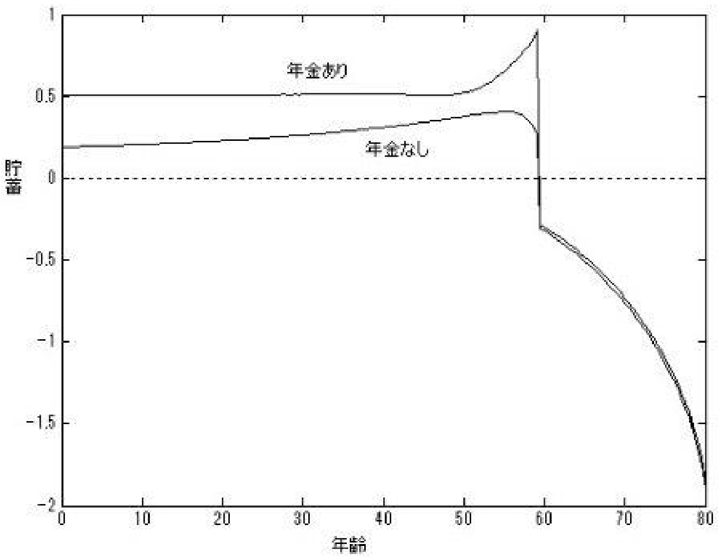


表１　貨幣増加率とマクロ変数の関係

貨幣増加率 (%)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
資本ストック	5.478	5.691	5.832	5.930	6.003	6.058	6.103	6.139	6.169
実質賃金	1.181	1.197	1.208	1.215	1.220	1.224	1.227	1.230	1.232
実質利子率 (%)	7.12	6.83	6.65	6.52	6.43	6.37	6.31	6.27	6.24
名目利子率 (%)	11.12	12.83	14.65	16.52	18.43	20.37	22.31	24.27	26.24
実質貨幣残高	9.531	8.334	7.358	6.557	5.900	5.356	4.900	4.513	4.181
移転支払	0.381	0.500	0.589	0.656	0.708	0.750	0.784	0.812	0.836
資産のジニ係数	0.091	0.106	0.118	0.126	0.133	0.137	0.141	0.143	0.146
効用	0.679	0.665	0.651	0.637	0.623	0.609	0.596	0.584	0.571

図３　公的年金と貯蓄



3．労働時間が変化する場合

これまで現役世代の労働時間は一定としてきた。つぎに労働時間が変化する場合について検討しよう。現役世代の効用関数をつぎのように変更する。

$$u(c,m,l)=\frac{(c^{\gamma}m^{\lambda}(1-l)^{1-\gamma-\lambda})^{1-\eta}-1}{1-\eta}\quad ,\quad (0<\gamma<1, 0<\lambda<1, \eta>0)$$

ここで l は労働時間を表し、$1-l$ は余暇時間である。予算制約は

$$da=(ra+(1-\tau)wzl+x-c-Rm)dt \tag{21}$$

で与えられる。予算制約のもとで効用が最大となるように消費、貨幣保有量、および労働時間を決定する。動的計画法を適用すると、HJB 方程式は

$$\rho V(a,z,t)=\max_{c,m,l}\left\{u(c,m,l)+V_a(a,z,t)(ra+(1-\tau)wzl+x-c-Rm)+V_z(\theta(\mu-z))+\frac{\sigma^2}{2}V_{zz}(a,z,t)+V_t(a,z,t)\right\} \quad (22)$$

となる。消費と貨幣、労働時間の最適条件は

$$u_c = V_a(a,z,t)$$
$$u_m = RV_a(a,z,t) \quad (23)$$
$$u_l = -(1-\tau)\,wzV_a(a,z,t)$$

である。これより

$$c=\left[\frac{\gamma H_1^{\lambda(1-\eta)}H_2^{(1-\gamma-\lambda)(1-\eta)}}{V_a}\right]^{\frac{1}{\eta}}$$

$$m = H_1c \quad (24)$$

$$l = 1 - H_2c$$

となる。ただし

$$H_1=\frac{\lambda}{\gamma R}, \quad H_2=\frac{1-\gamma-\lambda}{\gamma(1-\tau)wz}$$

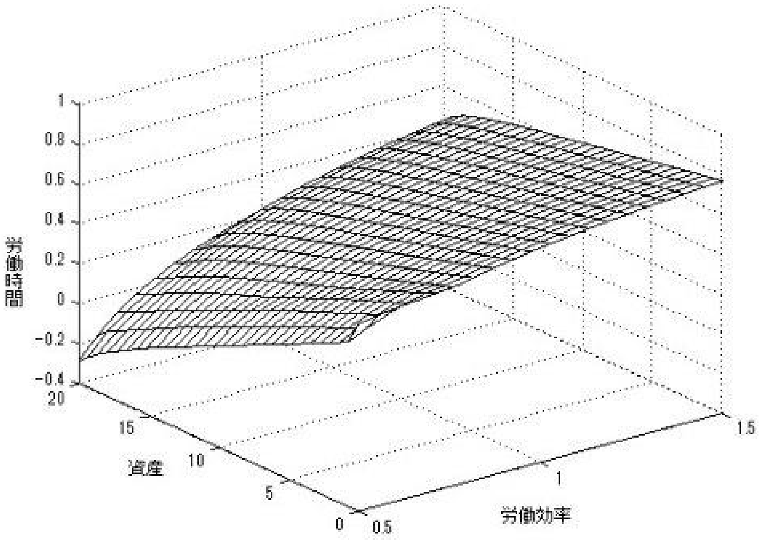
である。(24) 式によると、税率が高くなると労働時間は短くなり余暇時間が増える。資産が $a = a_{\mathrm{mix}}, a_{\max}$ であれば、貯蓄はゼロでなければならない。このため、
$ra + (1-\tau)wzl + x - c - Rm = 0$ が成り立つ。この式と (23) 式から

$$c(a_{\min},z,t)=\frac{ra_{\min}+(1-\tau)wz+x}{1+(1-\tau)wzH_2+RH_1}$$

$$V_a(a_{\min},z,t)=\frac{\gamma H_1^{\lambda(1-\eta)}H_2^{(1-\gamma-\lambda)(1-\eta)}}{c(a_{\min},z,t)^{\eta}}$$

となる。$a_{\min}$ の代わりに $a_{\max}$ とすれば、$c(a_{\max},z,t)$ と $V_a(a_{\max},z,t)$ が得られる。税率を $\tau = 0.3$ として市場均衡を求めた。効用関数のパラメータは $\gamma = 0.4$, $\lambda = 0.3$, $\eta = 2$ とする。引退世代の効用関数はこれまでと変わらない。数値計算の結果、$K^* = 5.459$, $L^* = 0.346$(総労働), $w^* = 1.179$, $r^* = 7.15\%$ となる。労働時間を $l = 1$ に固定した場合と比べて、資本は減少して実質利子率は上昇する。60歳になるまで資産は増加し、引退後は減少する。また高年齢の世代ほど貯蓄は少なくなり、60歳になる前に貯蓄は負となる。世代別のジニ係数は引退するまで低下し、その後は高くなり資産格差は拡大する。図4 は 30歳のときの労働時間を示している。労働時間は労働効率が高くなると長くなり、資産が増えると短くなる。先に指摘したように、現在のモデルでは貨幣

図４　労働時間



は長期的にも実質効果を持つ。貨幣増加率が 10% に上昇すると、$K^* = 5.737$, $L^* = 0.339$, $w^* = 1.200$, $r^* = 6.77\%$ となり、資本は増加して実質利子率は低下する。インフレ率が 4% であれば全世代の消費は 0.869 で、実質貨幣残高は 5.604 となる。10% になると消費は 0.882、貨幣残高は 3.787 に減少する。消費と余暇時間は増えるが、貨幣の減少で効用は 0.241 から 0.165 へ低下する。したがってインフレ政策によって経済パフォーマンスは悪化する。

4. 結語

通常、資産選択モデルでは投資家の年齢は考慮しない。現役世代も退役世代も同じ投資行動を取ると考えられているからである。しかし実際にはライフステージに合わせて投資が行われている。消費のライフサイクル仮説によると、現役時代に資産を蓄積し、退職後にそれを取り崩す。資産は年齢とともに増加し、退職すれば減少するのが典型的なパターンである。現在のモデルに即していえば、資本に振り向けられる資産はライフステージに応じて変化する。米国では株価の上昇が資産格差をもたらしているが、株価の影響は資産の保有状況によって違ってくる。したがって格差問題の研究では資産の蓄積だけでなく価格変動にも目を向ける必要がある。そこでは収益率の特異性が重要な役割は果たすであろう。異質的エージェントを仮定すればモデルは相当複雑になるが、数値計算の技法を適用すれば多くのモデルは解析可能である。

注

1) 日本でも資産格差の拡大が指摘されている。その実態について Kitao and Yamada (2019) を参照せよ。

2) 異質的シドラウスキーモデルについて、釜 (2021) の第9章を参照。

3) 所得を消費で近似したフィッシャーの交換方程式は $MV = PC$ である。これより $M/P = C/V = kC$ となる。流通速度の逆数 k は Q に等しい。Q は名目利子率の減少関数であり、流通速度は利子率の増加関数となる。

4) 公的年金と貯蓄の関係について、Feldstein (1974) の有名な研究がある。それによると年金制度は資本蓄積を促進しない。Atkinson (1995) は既存の実証研究を総括して、社会保障支出は経済成長を阻害しているとは一概に言えないと結論づけている。

参考文献

釜国男 (2021)『計算経済学』日本評論社。

Atkinson, A. B. (1995) “The Welfare State and Economic Performance”, *National Tax Journal*, Vol.48, pp.171-198.

Feldstein, M. (1974) “Social Security,Induced Retirement and Aggregate Capital Accumulation”, *Journal of Political Economy*, Vol.82, pp.905-926.

Kitao, S., and T. Yamada (2019) “Dimensions of Inequality in Japan: Distributions of Earnings, Income and Wealth between 1984 and 2014”, Discussion papers 19034, Research Institute of Economy, Trade and Industry.

Kuhn, M., M. Schularick, and U. I. Steins (2019) “Income and Wealth Inequality in America, 1949-2016”, *Journal of Political Economy*, Vol.128, pp.3469-3519.