

# 変分問題の数値解法 (計算経済学の研究その9)

Numerical Analysis of Variational Problems

釜 国 男  
Kunio KAMA

## 1. はじめに

変分法は最適成長モデルをはじめ多くの動学的経済問題に応用されている。最適制御理論の出現で以前ほど使われなくなったが、古典的な論文を読むうえで必要である。また多くの問題は最適制御理論を使わなくても変分法で解ける。動学的な問題で陽表的な解が得られるのは特殊なケースに限られ、一般に解析解は存在しない。このため数値的な方法で近似解を求める必要がある。変分問題の数値解法は直接法と間接法に大別される。直接法は汎関数の停留関数を直接求める方法である。間接法ではオイラー方程式を導出してその解を求める。解の性質を調べるだけでなく間接法でもかまわないが、実際に解を求めるには直接法が有効である。直接法では停留関数をリッツ法やガレルキン法で近似する。リッツ法は適当な基底関数を選びその1次結合で近似を行う。ガレルキン法では残差を定義して、残差が最小となるように近似式の係数を定める。いずれの方法でも近似係数に関する連立方程式を解く問題に帰着する。近年、コンピュータの性能が向上して複雑な変分問題も解けるようになった。しかし、これまで経済学では解析解のある比較的簡単な問題しか扱ってこなかった。実際には数値的な方法を使うと相当複雑な問題でも解くことができる。最近のマクロ経済モデルは極めて複雑であり、解析的な方法で解を求めることはできない。このため数値的解法を研究する計算経済学という新しい分野が生まれている。一連の研究で計算経済学の主要な成果を検討してきたが、今回は変分問題の数値解法を取り上げる。物理や工学の分野では古くから使われている標準的な方法であるが、経済学への応用は始まったばかりである。

## 2. 変分法の基本原理

変分法の目的は、所与の制約条件のもとで目的関数を最小化することである。式で表すと

$$\begin{aligned} \min I[y] &= \int_a^b F(y(x), y'(x), x) dx & (1) \\ \text{s.t. } y(a) &= \alpha, y(b) = \beta \end{aligned}$$

$I[y]$  は関数から実数への写像であり、 $F(y, y', x)$  は変数に関して  $C^2$  級とする。いくつかの条件を

課すと、変分問題には解（停留関数）が存在する。説明の便宜上、はじめに変分法の基本原理を導出する。

停留関数を  $y^*(x)$  で表し、任意の関数  $y(x)$  を

$$y(x) = y^*(x) + \varepsilon h(x)$$

$$h(a) = h(b) = 0$$

とおく。ここで  $\varepsilon$  は十分小さい数である。(1)の右辺に  $y(x)$  を代入すると、目的関数は  $\varepsilon$  の関数となり

$$I(\varepsilon) = \int_a^b F(y^*(x) + \varepsilon h(x), y'^*(x) + \varepsilon h'(x), x) dx$$

と表される。 $I(\varepsilon)$  を  $\varepsilon$  で微分すると

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \{F_y h(x) + F_{y'} h'(x)\} dx$$

となる。 $dI/d\varepsilon = 0$  とおくと

$$\int_a^b F_y h(x) dx + \int_a^b F_{y'} h'(x) dx = 0$$

第二項は部分積分により

$$\begin{aligned} \int_a^b F_{y'} h'(x) dx &= [F_{y'} h(x)]_a^b - \int_a^b h(x) \frac{d}{dx} F_{y'} dx \\ &= - \int_a^b h(x) \frac{d}{dx} F_{y'} dx \end{aligned}$$

となる。したがって最適条件は

$$\int_a^b \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) h(x) dx = 0$$

と表される。 $h(x)$  は任意の関数だから、 $y^*(x)$  はつぎのオイラー方程式を満たす必要がある。

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \tag{2}$$

ここで

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_{y'x} + F_{y'y} y' + F_{y'y'} y''$$

であり、オイラー方程式は

$$F_{y'y'} y'' + F_{y'y} y' + F_{y'x} - F_y = 0 \tag{3}$$

と表すこともできる。これは2階常微分方程式であり、積分定数は境界条件から決まる。(2)は必要条件であり、オイラー方程式を解いても目的関数を最小化するとは限らない。問題によっては解がなかったり、無数の解がある。したがって数値計算を行う前に解の性質を調べておく必要がある。次に変分法をいくつかの例題に適用しよう。

[例1] 平面上の曲線を  $y=y(x)$  と表す。  $x=a$  から  $x=b$  までの曲線の長さは

$$I[y]=\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2} dx$$

である。最短距離の曲線を求めよう。わざわざ計算するまでもないが、変分法の例題として取り上げた。  $F(y, y', x)=\sqrt{1+y'(x)^2}$  とおくと

$$F_y(y, y', x)=0, F_{y'}(y, y', x)=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$$

であり、オイラー方程式は

$$\frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}=0$$

となる。これは  $y'(x)=const$  を意味する。つまり停留関数は2点を結ぶ直線である。

[例2] つぎは経済問題への応用例である<sup>1)</sup>。計画当局は

$$I[\pi]=\int_0^T e^{-\rho t} f(\pi, \pi') dt$$

$$\text{制約条件: } \pi(0)=\pi_0, \pi(T)=0$$

が最小となるようにインフレをコントロールする。  $\pi$  は期待インフレを表し、損失関数は

$$f(\pi, \pi')=\left(\frac{\pi'}{\beta\phi}\right)^2 + \omega\left(\frac{\pi'}{\phi} + \pi\right)^2$$

とする。オイラー方程式は

$$\pi'' - \rho\pi' - \Psi\pi=0$$

となる。ただし

$$\Psi=\frac{\omega\beta^2\phi(\rho+\phi)}{1+\omega\beta^2}$$

これは定数係数の線形微分方程式であり、一般解は

$$\pi(t)=C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

と表される。ここで

$$r_1, r_2=\frac{1}{2}(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\Psi})$$

であり、積分定数は

$$C_1=\frac{-\pi_0 e^{r_2 T}}{e^{r_1 T}-e^{r_2 T}}, C_2=\frac{\pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_1 T}-e^{r_2 T}}$$

となる。パラメータを  $\omega=0.5, \beta=2, \phi=0.6, \rho=0.98$  とすると、特性根は

$$r_1=1.424, r_2=-0.444$$

1) この例題は Chiang (1999) から引用した。

となる。  $T=2$ ,  $\pi_0=1$  とすると最適プランは

$$\pi(t) = -0.0244e^{1.424t} + 1.0244e^{-0.444t}$$

で与えられる。

この例題には厳密解があるが、これは例外的なケースである。厳密解がない場合の解法について次節で説明する。

### 3. オイラー方程式の数値解法

一般にオイラー方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) \quad (a \leq x \leq b) \quad (4)$$

$$\text{境界条件: } y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

と表される。問題は境界条件を満たす解を求めることであるが、簡単な場合を除いて解析解を求めることはできない。このためルンゲクッタ法のような数値解法を用いる。ただし、(4)は境界条件を含んでおり通常の解法は適用できない。代わりにシューティング法を適用する。シューティング法のポイントは、 $y(b) = \beta$  となるように  $y'(a)$  を設定することである。 $y'(a) = t$  とすると、 $x = b$  における  $y$  の値は  $t$  の関数で  $y(b, t)$  と表される。問題は  $y(b, t) = \beta$  となる  $t$  を見つけることである。 $m(t) = y(b, t) - \beta$  とすると、 $m(t) = 0$  のとき  $y(b, t) = \beta$  となる。したがって  $m(t) = 0$  という方程式を解けばよい。 $y(b, t)$  の関数形が分かれば2分法やニュートン法が使えるが、一般に  $y(b, t)$  は未知の関数である。このため微分情報が必要なニュートン法は使えない。代わりにセカント法を用いる<sup>2)</sup>。はじめに適当に  $t_0$  と  $t_1$  を選んで、 $m(t_0)$  と  $m(t_1)$  を計算する。次に反復スキーム

$$t_{k+1} = t_k - \frac{t_k - t_{k-1}}{m(t_k) - m(t_{k-1})} m(t_k) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (5)$$

により  $t_2, t_3, \dots$  を求める。  $|m(t_k)| \leq 0.00001$  となるまで反復する。

先のインフレと失業の問題にシューティング法を適用しよう。オイラー方程式は

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = 0.98 \frac{d\pi}{dx} + 0.632\pi$$

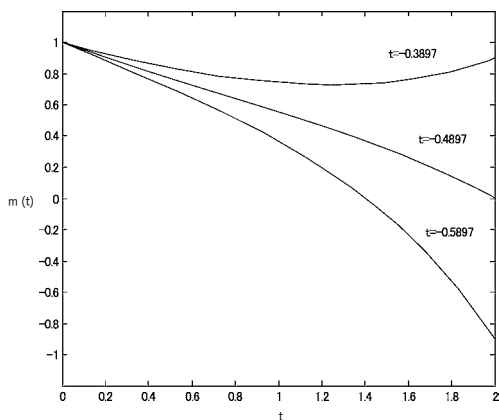
$$\text{境界条件: } \pi(0) = 1, \pi(2) = 0$$

である。 $\pi(2) = 0$  より  $m(t) = \pi(2, t)$  であり、誤差を表す曲線は直線となる。 $t = -0.4897$  のときに誤差はゼロとなる。図1は期待インフレの経路を表す。上から順に  $\pi'(0) = -0.3897$ ,  $-0.4897$ ,  $-0.5897$  に対応する。 $\pi'(0)$  が高すぎると目標水準を上回り、低すぎると下回る。 $\pi'(0) = -0.4897$  とすれば目標水準に達する。

さらに、つぎの問題について考えよう。

2) セカント法については釜 (2015), 第2章を参照せよ。

図1 期待インフレの経路



$$I[y] = \int_0^1 \{(1-y^2)(y')^2 - 4y\} dx$$

境界条件：  $y(0)=0, y(1)=-0.5$

ここで  $F=(1-y^2)(y')^2-4y$  である。したがって

$$F_{y'y'}=2(1-y^2), F_{y'y}=-4yy', F_{y'x}=0, F_y=-2y(y')^2-4$$

となる。オイラー方程式は

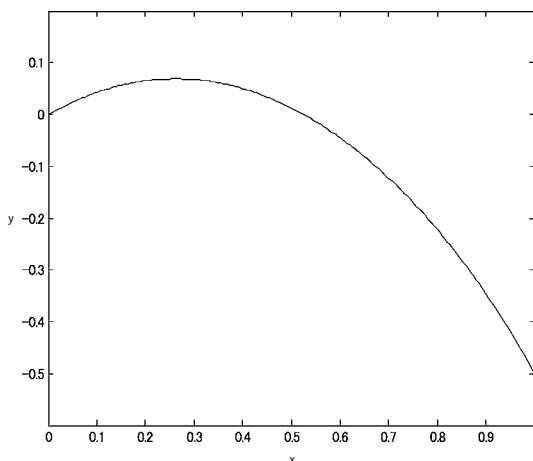
$$(1-y^2)y'' - y(y')^2 + 2 = 0$$

または

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{1-y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2}{1-y^2}$$

この微分方程式は解析的な方法では解けない。誤差関数は右上がりの曲線となり、 $t=0.5258$  で横軸と交わる。図2は数値解をプロットしたものである。 $y'(0)=0.5258$  であり、解を表す曲線は(0,

図2 変分問題の解曲線



0) と (1, -0.5) を通る. 解曲線を普通の関数で表すことはできない. そこで5次多項式を当てはめると

$$y = 0.516655x - 0.885643x^2 - 0.451267x^3 + 0.700151x^4 - 0.379156x^5$$

となる. これを目的関数に代入すれば極値が得られる.

[例3] 消費者の最適化問題について考える. 消費者の目的は予算制約のもとで生涯効用の現在価値を最大化することである.

$$\max \int_0^T e^{-\rho t} u(c) dt$$

$$\text{s.t. } \dot{A} = g(A) + w - c$$

$$\text{境界条件: } A(0) = A(T) = 0$$

ここで  $\rho$  は主観的割引率,  $A$  は資産ストック,  $w$  は賃金率,  $c$  は消費,  $g(A)$  は資産収益を表す. 消費者は貯蓄を資産の増加に当てる. ただし, 資産のない状態から始めて最終的に資産はゼロでなければならない. 効用関数に  $c = g(A) + w - \dot{A}$  を代入すると

$$I[A] = \int_0^T e^{-\rho t} u(g(A) + w - \dot{A}) dt$$

これは資産の最適経路を求める変分問題である.  $F = e^{-\rho t} u(g(A) + w - \dot{A})$  であり

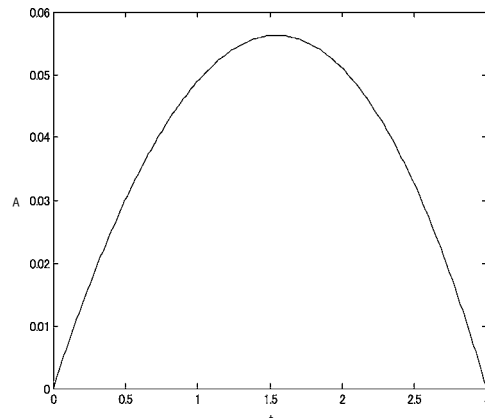
$$F_{\dot{A}\dot{A}} = e^{-\rho t} u'', \quad F_{\dot{A}A} = -e^{-\rho t} g' u'', \quad F_{\dot{A}t} = \rho e^{-\rho t} u', \quad F_A = e^{-\rho t} g' u'$$

となる. 効用関数は  $u(c) = -1/c$  とする.  $g(A) = rA$  とすると, オイラー方程式は

$$\ddot{A} = r\dot{A} + \frac{1}{2}(rA + w - \dot{A})(\rho - r)$$

となる. パラメータは  $T=3$ ,  $r=0.1$ ,  $\rho=0.05$ ,  $w=2$  とする. シューティング法を適用すると,  $A'(0)=0.0705$  のとき  $A(3)=0$  となる. 最初, 貯蓄はプラスで資産は増加するが, 途中からマイナスとなり資産は減少する (図3). この間に消費は一貫して増加する.

図3 資産の変動



これまで検討したのは唯一の解があるケースである。問題によっては複数の解がある。一例として、つぎの問題について考えよう。

$$I[y] = \frac{1}{2} \int_0^4 \{(y')^2 + h(y)\} dx$$

$$h(y) = \begin{cases} y^2 & \text{for } y > 0 \\ -y^2 & \text{for } y \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{境界条件: } y(0) = 0, y(4) = -1$$

オイラー方程式は

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -|y|$$

である。この場合、 $m(t)=0$  には  $t = -0.073477, 2.06856$  の二つの解がある。厳密解は  $y = -0.073477 \sinh(x)$  と  $y = 2.06856 \sin(x)$  である。この例のように問題によっては複数の解があり、あらかじめ誤差関数の形を調べておく必要がある。

以上の議論は複数の従属変数がある場合にも当てはまる。従属変数を  $y_1, y_2$  とすれば変分問題は

$$I[y_1, y_2] = \int_a^b F(y_1, y_2, y_1', y_2', x) dx \quad (6)$$

$$\text{境界条件: } y_1(a) = \alpha_1, y_1(b) = \beta_1, y_2(a) = \alpha_2, y_2(b) = \beta_2$$

と表される。オイラー方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y_1'} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y_2'} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

である。

[例 4] つぎの変分問題の停留関数を求めよう。

$$I[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} \{(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1 y_2\} dx$$

$$\text{境界条件: } y_1(0) = 0, y_1(\pi/2) = 1$$

$$y_2(0) = 0, y_2(\pi/2) = -1$$

$F = (y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1 y_2$  であり、オイラー方程式は

$$2y_2 - \frac{d}{dx}(2y_1') = 0, 2y_1 - \frac{d}{dx}(2y_2') = 0$$

となる。簡単化すると

$$y_1'' - y_2 = 0, y_2'' - y_1 = 0$$

これより

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} - y_1 = 0$$

この微分方程式の一般解は

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin(x) + C_4 \cos(x)$$

である ( $C_1, C_2, C_3, C_4$  は積分定数).  $y_2 = y_1''$  から

$$y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \sin(x) - C_4 \cos(x)$$

となる. 境界条件を満たすには

$$C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 1, C_4 = 0$$

でなければならない. したがって厳密解は

$$y_1 = \sin(x), y_2 = -\sin(x)$$

となる.

この問題は数値的に解くこともできる.  $y_1(0)$  と  $y_2(0)$  は与えられているが,  $y_1'(0)$  と  $y_2'(0)$  はわからない. この場合もシューティング法を適用する.  $y_1'(0) = t_1$ ,  $y_2'(0) = t_2$  とおくと,  $y_1(\pi/2)$  と  $y_2(\pi/2)$  は  $t_1, t_2$  の関数となる. そこで  $m_1(t_1, t_2) = y_1(\pi/2) - 1$ ,  $m_2(t_1, t_2) = y_2(\pi/2) + 1$  とし,  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 0$  を解いて  $t_1$  と  $t_2$  を求める. 先に検討した例 4 の問題では

$$m_1 = at_1 + bt_2 - 1, m_2 = bt_1 + at_2 + 1$$

となる. ただし

$$a = (e^{\pi/2} - e^{-\pi/2} + 2)/4, b = (e^{\pi/2} - e^{-\pi/2} - 2)/4$$

である.  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 0$  から,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -1$  となる. したがって初期条件を  $y_1(0) = 0$ ,  $y_1'(0) = 1$ ,  $y_2(0) = 0$ ,  $y_2'(0) = -1$  とすればよい. 誤差関数がわからない場合は 2 変数のセカント法を適用して  $t_1, t_2$  を求める.

最後に, 独立変数が二つある場合を検討する.  $w = w(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の連続関数で偏微分も連続とする. このとき

$$I[w] = \iint_R F\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, x, y\right) dx dy \quad (8)$$

の停留関数を求める. この場合, オイラー方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial w_y} \right) = 0 \quad (9)$$

となる<sup>3)</sup>. 例えば

$$I[w] = \iint_R \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

とする.  $F = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$  であり

3) 証明は変分法のテキスト, 例えば戸川 (1994) を参照.



$$\frac{\partial F}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial w_x} = 2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial w_y} = 2 \frac{\partial w}{\partial y}$$

これよりオイラー方程式は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

と表される。これは2次元ラプラス方程式である。したがって変分問題はラプラス方程式を解く問題に変換される。なお、ポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y)$$

は汎関数

$$I[w] = \iint_R \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2wf \right\} dx dy$$

のオイラー方程式である。このように特殊な偏微分方程式は変分問題の解と一致する。この性質を利用すれば偏微分方程式の数値解を求めることができる。

#### 4. 直接法

これまで検討したのはオイラー方程式を解く間接的な方法である。つぎに直接解法について説明しよう。代表的な方法はリッツ法、ガレルキン法、および有限要素法である。有限要素法は実用性が高くさまざまな分野で使われている。

##### 4.1 リッツ法

つぎの変分問題にリッツ法を適用する。

$$I[y] = \int_a^b F(y(x), y'(x), x) dx$$

リッツ法では停留関数を基底関数の一次結合で近似する。つまり

$$y(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \cdots + c_n \varphi_n(x) \tag{10}$$

で近似する。基底関数として多項式や三角関数、スプライン関数を用いる。汎関数は

$$I[y] = \int_a^b F \left( \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x), \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i'(x), x \right) dx$$

と表される。汎関数は近似係数の関数であり、 $I = f(c_0, c_1, \dots, c_n)$  と書ける。一階の条件

$$\frac{\partial f}{\partial c_0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial c_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial c_n} = 0$$

から近似係数を求める。

[例5] つぎの変分問題の数値解をリッツ法で求めよう。

$$I[y] = \int_0^1 \{(y')^2 - y^2 - 2xy\} dx$$

$$\text{境界条件: } y(0) = y(1) = 0$$

$\varphi_0(x) = 0$ ,  $\varphi_i(x) = x(1-x)^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  を基底関数とする.  $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$  であり, 近似式は境界条件を満たす. 近似解を

$$y(x) = c_1 x(1-x) + c_2 x(1-x)^2 + c_3 x(1-x)^3$$

とする.

$$y'(x) = c_1(1-2x) + c_2(1-4x+3x^2) + c_3(1-6x+9x^2-4x^3)$$

であり

$$f(c_1, c_2, c_3) = -\frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{15}c_2 - \frac{1}{30}c_3 + \frac{3}{10}c_1^2 + \frac{13}{105}c_2^2 + \frac{103}{1260}c_3^2 + \frac{3}{10}c_1c_2 + \frac{19}{105}c_1c_3 + \frac{79}{420}c_2c_3$$

となる. これより

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} = -\frac{1}{6} + \frac{3}{5}c_1 + \frac{3}{10}c_2 + \frac{19}{105}c_3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_2} = -\frac{1}{15} + \frac{3}{10}c_1 + \frac{26}{105}c_2 + \frac{79}{420}c_3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_3} = -\frac{1}{30} + \frac{19}{105}c_1 + \frac{79}{420}c_2 + \frac{103}{630}c_3 = 0$$

この連立1次方程式を解くと

$$c_1 = \frac{26369}{73554}, \quad c_2 = -\frac{1806}{12259}, \quad c_3 = -\frac{7}{299}$$

となり近似式は

$$y(x) = \frac{26369}{73554}x(1-x) - \frac{1806}{12259}x(1-x)^2 - \frac{7}{299}x(1-x)^3$$

と表される. なお, オイラー方程式は

$$y'' + y = -x$$

であり, 厳密解は

$$y_{exact} = \frac{\sin(x)}{\sin(1)} - x$$

で与えられる.

#### 4.2 ガレルキン法

2次元ポアソン方程式は次式で表される.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

$$\text{境界条件: } u(x_c, y_c) = g(x_c, y_c)$$

境界条件の  $C$  は  $xy$  平面上の閉曲線を表す。ポアソン方程式の解は、変分問題

$$I[u] = \iint_D \{u_x^2 + u_y^2 + 2uf\} dx dy$$

の解と一致する。  $u(x, y)$  を次式で近似する。

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y)$$

ただし近似式は境界条件を満たさなければならない。残差  $R(x, y; c)$  をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} R(x, y; c) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x, y) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i - f(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right) - f(x, y) \end{aligned} \quad (11)$$

$u(x, y)$  が近似解であれば残差はゼロになるとは限らない。そこで重みを付けた残差がゼロとなるように  $c_i$  を決める。つまり

$$\iint_D w_k R dx dy = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

ただし  $w_k(x, y)$  は重み関数である。(11)を代入すると

$$\sum_{i=1}^n c_i \iint_D w_k \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_D w_k f(x, y) dx dy$$

これは  $c_i$  を未知数とする連立方程式である。重み関数としてさまざまな関数が提案されているが、ガレルキン法では基底関数そのものを用いる<sup>4)</sup>。この場合、係数は

$$\sum_{i=1}^n c_i \iint_D \varphi_k \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_D \varphi_k f(x, y) dx dy$$

から求める。この連立1次方程式は簡単に解ける。

### 4.3 有限要素法

有限要素法は積分領域をいくつかの小領域(要素)に分割し、各要素にリッツ法あるいはガレルキン法を適用する方法である。通常は2次元の問題に適用するが、説明の便宜上、1次元ポアソン方程式に応用しよう。1次元ポアソン方程式は次式で表される。

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (12)$$

$$\text{境界条件: } u(0) = u(1) = 0$$

これは次の変分問題に対応する。

4) 詳しくは Judd (1998) の第11章を参照せよ。

$$I[y] = \int_0^1 \{(u'(x))^2 - 2uf\} dx$$

$u(x)$  の近似式を

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$$

とする。区間  $[0, 1]$  を  $n+1$  個の小区間に分け、分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$$

とする。基底関数として、つぎの区分線形関数を用いる。

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{D} & \text{for } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{D} & \text{for } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで  $D$  は分点の間隔である。明らかに

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。 $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  であり,  $u(x)$  は境界条件を満たしている。残差をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} R(x;c) &= u''(x) + f(x) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(x) + f(x) \end{aligned}$$

近似式の係数は

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(x) + f(x) \right\} \varphi_k(x) dx = 0$$

または

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_0^1 \varphi_i''(x) \varphi_k(x) dx = - \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

から求める。部分積分により

$$\int_0^1 \varphi_i''(x) \varphi_k(x) dx = [\varphi_i'(x) \varphi_k(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_k'(x) dx$$

となるが、右辺の第一項はゼロである。 $\varphi_i'(x)$  は

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{D} & \text{for } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\frac{1}{D} & \text{for } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

これより第二項はつぎのようになる。

$$\int_0^1 \varphi'_k(x) \varphi'_k(x) dx = \frac{2}{D} \quad (i=k)$$

$$\int_0^1 \varphi'_{k-1}(x) \varphi'_k(x) dx = -\frac{1}{D} \quad (i=k-1 \text{ or } i=k+1)$$

$$\int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_k(x) dx = 0 \quad (\text{other case})$$

係数方程式は行列とベクトルを用いて

$$Ac = b$$

と表される。A の要素は  $a_{ij} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx$ 、b の要素は  $b_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$  である。上の結果から、近似係数は

$$\frac{1}{D} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

を満たす。1次元ポアソン方程式の非同次項を  $f(x)=1$  とすると、 $b_i = \int_0^1 \varphi_i(x) dx = D$  であり

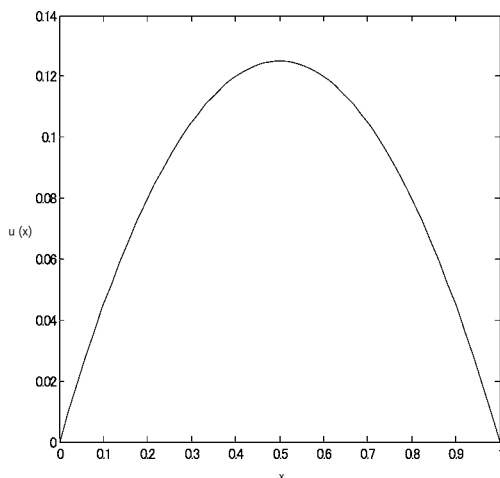
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^2 \\ D^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ D^2 \end{bmatrix}$$

となる。ここで  $D=1/(1+n)^2$  である。(12)の厳密解は

$$u(x) = \frac{x(1-x)}{2}$$

である。図4に示したように近似解も  $x=0.5$  を中心に左右対称となる (ただし、 $n=50$ )。

図 4 ポアソン方程式の近似解



## 5. 最適成長モデル

これまで検討した変分問題は連続時間を仮定している。しかし動学的モデルの多くは離散時間で定式化される。ラムゼーの最適成長モデルを例にオイラー方程式の数値解法について説明しよう。モデルはつぎのように表される。

$$\max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$s.t. \quad k_{t+1} = F(k_t) - c_t, \quad F(k_t) = (1 - \delta)k_t + f(k_t)$$

$$k_0 \text{ given}$$

消費者は生涯効用の現在価値を最大化する。効用最大の条件は

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) F'(k_{t+1})$$

である。消費は資本の関数であり  $C(k)$  と表す。一階条件から

$$0 = u'(C(k)) - \beta u'(C(F(k) - C(k))) F'(F(k) - C(k))$$

が成り立つ。  $u(c) = c^{\gamma+1}/(\gamma+1)$ ,  $f(k) = \lambda k^\alpha$  とすると、オイラー方程式は

$$c_t^\gamma = \beta c_{t+1}^\gamma (1 - \delta + \alpha \lambda k_{t+1}^{\alpha-1})$$

となる。定常状態の資本が  $k^* = 1$  となるように

$$\lambda = \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\alpha \beta}$$

とする。定常状態の消費は  $c^* = \lambda - \delta$  となる。変分法と同じように、 $C(k)$  を基底関数の一次結合で近似する。

$$C(k) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(k)$$

基底関数は

$$\varphi_i(k) = T_{i-1}\left(\frac{2(k-k_m)}{k_M-k_m}-1\right), \quad k_m \leq k \leq k_M$$

とする。ここで  $T_{i-1}(\cdot)$  はチェビシエフ多項式である<sup>5)</sup>。オイラー方程式の残差を

$$R(k;a) = u'(C(k)) - \beta u'(C(F(k)) - C(k)) F'(F(k) - C(k))$$

とする。近似式の係数を求めるためにガレルキン法を適用して

$$\int_{k_m}^{k_M} R(k;a) \varphi_i(k) dk = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

とする。これは  $a_i$  を未知数とする連立方程式である。ガウス・チェビシエフ積分で近似すると

$$\sum_{j=1}^m R(k_j;a) \varphi_i(k_j) = 0$$

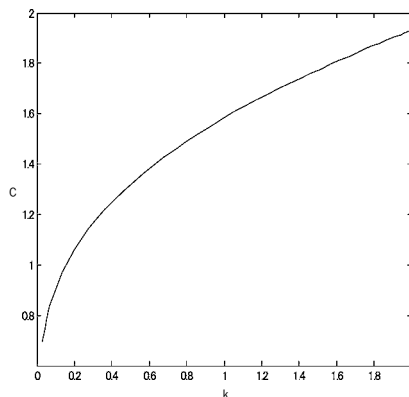
となる。 $m > n$  であり、 $k_j$  は  $\varphi_{m+1}(k)$  の零点である。 $n=15$ ,  $m=50$ ,  $k_m=0.03$ ,  $k_M=2$  として計算する。モデルのパラメータは  $\alpha=0.25$ ,  $\beta=0.98$ ,  $\gamma=-2$ ,  $\delta=0.5$  とする。係数に関する連立方程式を解くと、消費関数の係数はつぎのようになる。

$a_1=1.4861$	$a_6=0.0177$	$a_{11}=-0.0023$
$a_2=0.5322$	$a_7=-0.0112$	$a_{12}=0.0016$
$a_3=-0.1245$	$a_8=0.0069$	$a_{13}=-0.0011$
$a_4=0.0555$	$a_9=-0.0046$	$a_{14}=0.0007$
$a_5=-0.0298$	$a_{10}=0.0033$	$a_{15}=-0.0011$

図5は消費と資本ストックの関係を示している。消費は資本とともに増加するが傾きは小さくなる。

不確実性を考慮しても基本的な考え方は変わらない。つぎのようにモデルを変更する。

図5 消費の policy function



5) チェビシエフ多項式については釜 (2015), 第2章を参照せよ。

$$\begin{aligned} \max_{c_t} E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ \text{s.t. } k_{t+1} = \theta_t f(k_t) - c_t \\ k_0 \text{ given} \end{aligned}$$

$\theta_t$  は生産性ショックを表し

$$\log(\theta_t) = \rho \log(\theta_{t-1}) + \varepsilon_t, |\rho| < 1 \quad \varepsilon_t \sim iid.N(0, \sigma^2)$$

に従う。消費者は  $\theta_t$  を観察して消費と貯蓄を決定する。消費のオイラー方程式は

$$u'(c_t) = \beta E\{u'(c_{t+1})\theta_{t+1}f'(k_{t+1})|k_t, \theta_t\}$$

である。右辺の  $E$  は条件付き期待値を表す。消費は資本と生産性ショックの関数であり  $C(k, \theta)$  と記す。  $C(k, \theta)$  はつぎの式を満たす。

$$0 = u'(C(k, \theta)) - \beta E\{u'(C(\theta f(k) - C(k, \theta), \bar{\theta})) \times \bar{\theta} f'(\theta f(k) - C(k, \theta)) | \theta\}$$

ここで  $\bar{\theta}$  は来期の生産性ショックである。便宜上、つぎのように変形する。

$$0 = C(k, \theta) - (u')^{-1}(\beta E\{u'(C(\theta f(k) - C(k, \theta), \bar{\theta})) \times \bar{\theta} f'(\theta f(k) - C(k, \theta)) | \theta\})$$

$C(k, \theta)$  を基底関数の一次結合で近似して

$$C(k, \theta) = \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_\theta} a_{ij} \varphi_{ij}(k, \theta)$$

とする。基底関数は

$$\varphi_{ij}(k, \theta) = T_{i-1}\left(\frac{2(k-k_m)}{k_M-k_m}-1\right) T_{j-1}\left(\frac{2(\theta-\theta_m)}{\theta_M-\theta_m}-1\right)$$

ただし、 $\ln \theta_m = \varepsilon_m(1-\rho)^{-1}$ ,  $\ln \theta_M = \varepsilon_M(1-\rho)^{-1}$ ,  $\varepsilon \in [\varepsilon_m, \varepsilon_M]$  である。先の条件式を

$$0 = C(k, \theta) - (u')^{-1}\left(\beta \int_{-\infty}^{\infty} I(k, \theta, z) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2}} dz\right)$$

で近似する。ここで

$$I(k, \theta, z) = u'(C(\theta f(k) - C(k, \theta), e^{\sigma z} \theta^\rho)) \times e^{\sigma z} \theta^\rho f'(\theta f(k) - C(k, \theta)) \pi^{-1/2}$$

であり

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(k, \theta, z) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2}} dz \cong \sum_{j=1}^m I(k, \theta, \sqrt{2}z_j) \omega_j$$

とする。  $\omega_j$  と  $z_j$  は数値積分のウェイトと標本点である。オイラー方程式の残差を

$$R(k, \theta; a) = C(k, \theta) - (u')^{-1}\left(\beta \sum_{j=1}^m I(k, \theta, \sqrt{2}z_j) \omega_j\right)$$

として

$$P_{ij}(a) = \int_{k_m}^{k_M} \int_{\theta_m}^{\theta_M} R(k, \theta; a) \varphi_{ij}(k, \theta) d\theta dk$$

を定義する。右辺の積分をガウス・チェビシェフ積分で近似すると



$$P_{ij}(a) = \sum_{k=1}^{m_k} \sum_{l=1}^{m_l} R(k_i, \theta_j; a) \varphi_{ij}(k_{l_k}, \theta_{l_\theta})$$

となる。ここで

$$k_{l_k} = k_m + \frac{1}{2}(k_M - k_m)(z_{l_k}^{m_k} + 1) \quad (l_k = 1, 2, \dots, m_k)$$

$$\theta_{l_\theta} = \theta_m + \frac{1}{2}(\theta_M - \theta_m)(z_{l_\theta}^{m_\theta} + 1) \quad (l_\theta = 1, 2, \dots, m_\theta)$$

$$z_l^n = \cos\left(\frac{(2l-1)\pi}{2n}\right) \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

である。近似解の係数は

$$P_{ij}(a) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_k, j = 1, 2, \dots, n_\theta)$$

から求める<sup>6)</sup>。

## 6. むすび

変分問題の標準的な解法ではオイラー方程式を導出して解析解を求める。ただし、この方法はごく簡単な問題にしか適用できない。複雑な問題は解析解をもたないからである。代わりに数値解法を用いると近似解が得られる。最新のコンピュータを使うと、ほとんどの計算は数秒で終わる。経済学でも変分法を用いるが、ごく簡単な問題に限られている。しかし数値解法を利用すれば複雑な問題でも解くことができる。マクロ経済学では、RBCモデルの出現によって数値解析を用いた研究が増えている。最近では離散型モデルに代わって連続時間モデルを使った研究が進んでいる。連続時間モデルの数値解析には新しい方法が必要であり、今後の発展が期待される。

### 参考文献

Chiang, Alpha (1999) *Elements of Dynamic Optimization*, Waveland Press

釜 国男 (2015) 『経済モデルの数値解析』多賀出版

戸川隼人 (1994) 『変分法と有限要素法』日本評論社

Judd, Kenneth (1998) *Numerical Methods in Economics*, MIT Press

———, (1992) “Projection methods for solving aggregate growth models”, *Journal of Economic Theory*, vol. 58, 410-52

6) 計算結果については Judd (1992) を参照せよ。