

# 確率微分方程式の数値解法 (計算経済学の研究その11)

## Numerical Analysis of Stochastic Differential Equations

釜 国男  
Kunio KAMA

### 1. はじめに

これまで物理や生物学など自然科学の分野で使われてきた確率微分方程式 (stochastic differential equation、SDE と略) は、いまでは経済学や金融工学でも使われている。とくにオプション価格に関するブラック・ショールズ方程式は有名である。常微分方程式は確定的な解をもつが、SDE の解は確率的に変化する。解析解がある特殊な方程式を除いて、一般に数値的な方法で近似解を求める。通常の微分方程式に使用されるアルゴリズムは確率微分方程式には適用できない。このため簡単なものから複雑なものまでさまざまな解法が提案されている。以下ではいくつかの代表的な解法を取り上げる。最初に確率微分方程式とは何かを説明したあと、確率解析の基礎となる伊藤の公式について述べる。次に最も基本的な解法であるオイラー・丸山スキームについて検討する。確率微分方程式には強収束と弱収束という二つの概念がある。これらの概念と数値解の安定性について簡単に触れる。最後に多変数のケースに一般化して、数値解法を具体的に説明する<sup>1)</sup>。

### 2. 確率微分方程式

一般に確率微分方程式はつぎの式で表される。

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t), 0 \leq t \leq T \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1)$$

$a(t, X(t))$  はドリフト係数、 $b(t, X(t))$  は拡散係数という。確率微分方程式の解である  $X(t)$  は拡散過程 (diffusion process) と呼ばれる。

$W(t)$  は標準ブラウン運動 (ウィーナー過程) であり、つぎの性質をもつ。

- (1)  $P(W(0)=0)=1$
- (2)  $E(W(t))=0$  all  $t \in [0, \infty)$
- (3)  $E(W(t)W(s)) = \min(t, s)$
- (4)  $s < t$  とすると  $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$
- (5)  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$  に対して  $W(t_2) - W(t_1)$  と  $W(t_3) - W(t_2)$  は独立である。
- (6)  $W(t)$  のサンプルパスは連続である。

(1) はつぎのように積分方程式で表すこともできる。

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s) \quad (2)$$

右辺の第1項はリーマン積分で、第2項は確率積分である。ブラウン運動のパスは微分不可能であり、積分を行うには独自の規則を適用する。確率解析には伊藤確率解析とストラトノビッチ確率解析の二つの方法がある。それぞれ長所と短所があり、問題に応じて使い分ける。

伊藤の確率積分は次式で定義される。

$$\int_0^t b(s, X(s))dW(s) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} b(t_j, X(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \quad (3)$$

ここで  $t_k = k\Delta t$ ,  $\Delta t = t/n$  である。一例として  $W(t)$  の積分

$$I = \int_0^T W(t)dW(t)$$

を求めよう。

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1})^2 - W(t_j)^2 - (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( W(T)^2 - W(0)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 \right) \end{aligned}$$

ここで  $\sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$  の期待値は  $T$ 、分散は  $O(\Delta t)$  となる。したがって

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2} \{W(T)^2 - T\}$$

となる。一般に  $X(t)$  が  $N(0, \sigma^2 t)$  に従うブラウン運動であれば

$$\int_0^T X(t)dX(t) = \frac{1}{2} \{X(T)^2 - \sigma^2 T\}$$

が成り立つ。

小区間  $[t_j, t_{j+1}]$  の中点  $(t_j + t_{j+1})/2$  を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^T W(t)dW(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n-1} W\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \\ &= \frac{1}{2} W(T)^2 \end{aligned}$$

となる。これはストラトノビッチ積分 (Stratonovich integral) と呼ばれる。伊藤積分と区別して

$$\int_0^T W(t) \circ dW(t) = \frac{1}{2} W(T)^2$$

と記す。

ストラトノビッチ型確率微分方程式

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t)) \circ dW(t)$$

の解は伊藤型確率微分方程式

$$dX(t) = \left[ a + \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial X} b \right] (t, X) dt + b(t, X) dW(t)$$

の解と等しい。逆に伊藤型確率微分方程式

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t)$$

はストラトノビッチ型確率微分方程式

$$dX(t) = \left[ a - \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial X} b \right] (t, X) dt + b(t, X) \circ dW(t)$$

と同じ解をもつ。例えば

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$

の解は

$$X(t) = X_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right)$$

与えられるが、これはストラトノビッチ型確率微分方程式

$$dX(t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) X(t) dt + \sigma X(t) \circ dW(t)$$

の解でもある。ストラトノビッチ型では決定論的な微分則が成立するが、マルチンゲール性を保持しない。一方、伊藤型はマルチンゲール性を保持するが、合成関数のチェーンルールが成り立たない。

(4)、(5) の性質により、ブラウン運動を離散近似することができる。区間  $[0, T]$  を  $n$  個の小区間に分けて分点を

$$tk = k\Delta t \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

にとる。 $\Delta t = T/n$  はステップ幅である。ブラウン運動は

$$W(t_k) = W(t_{k-1}) + \Delta W(t_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

と表される。 $\Delta W(t_k)$  は  $\sqrt{\Delta t} N(0, 1)$  に従う確率変数である。 $W(t_k)$  は

$$W(t_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta W(t_j) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

と増分の和で表すこともできる。MATLAB の正規乱数を生成する関数を使って計算できる。図 1 はブラウン運動のサンプルパスである。 $T = 1$ 、 $n = 500$  でステップ幅は  $\Delta t = 0.002$  としている。

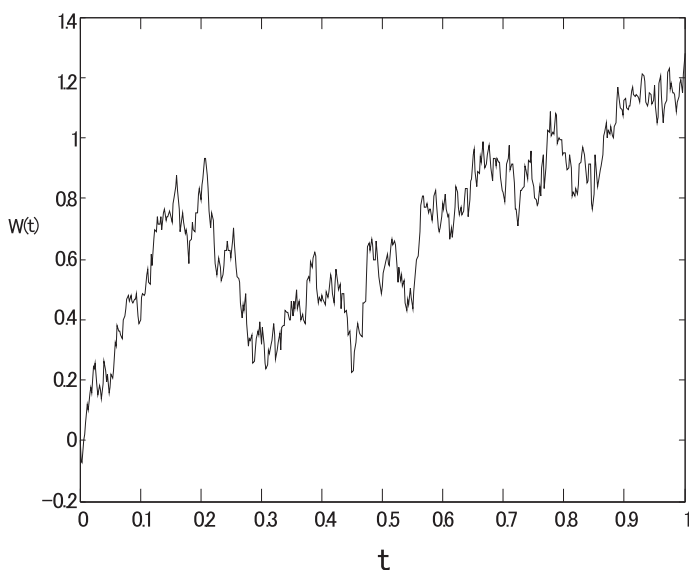
つぎの条件の下で (1) には唯一の解が存在する<sup>2)</sup>。

(1)  $X(0)$  の 2 次モーメントは有限で、 $X(0)$  は  $W(t)$ ,  $t \geq 0$  と独立である。

(2)  $t \in [0, T]$  および実数  $x, y$  に対して

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$$

図1 ブラウン運動のサンプルパス



を満たす正の定数  $K$  が存在する。

(3)  $t \in [0, T]$  および実数  $x$  に対して

$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$$

を満たす正の定数  $K$  が存在する。

ここで確率解析の基礎である伊藤の公式について説明しよう。 $X(t)$  は (1) で定義された確率過程とする。関数  $Y=F(t, x)$  は  $t$  に関して 1 階連続微分可能で、 $x$  に関して 2 階連続微分可能である。

このとき  $Y$  の確率微分は

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} a(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b(t, x)^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x} b(t, x) dW(t) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。簡単化のため

$$P_F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} a(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b(t, x)^2, \quad Q_F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x} b(t, x)$$

とすると、(6) は積分形で

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t P_F(s, X(s)) ds + \int_0^t Q_F(s, X(s)) dW(s) \quad (7)$$

と表される。

確率微分方程式の例をいくつかあげよう。

[例 1] 算術ブラウン運動

$$dX(t) = a dt + b dW(t)$$

解析解は

$$X(t) = X(0) + at + bW(t)$$

である。

[例 2] 幾何ブラウン運動

$$\begin{cases} dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma X(t) dW(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (8)$$

金融工学ではブラック・ショールズ方程式と呼ばれる。解析解は

$$X(t) = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right) \quad (9)$$

または

$$\log X(t) = \log X_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)$$

である。対数変換すると算術ブラウン運動に従う。確認のために

$$X = F(t, Y) = X_0 e^Y, \quad Y = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)$$

とする。伊藤の公式から

$$dX = X_0 e^Y dY + \frac{1}{2} X_0 e^Y (dY)^2$$

ここで

$$dY = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW(t)$$

$(dt)^2 = 0$ ,  $(dt)(dW(t)) = 0$ ,  $(dW(t))^2 = dt$  だから

$$(dY)^2 = \sigma^2 dt$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} dX(t) &= X_0 e^Y \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + X_0 e^Y \sigma dW(t) + \frac{1}{2} X_0 e^Y \sigma^2 dt \\ &= \mu X(t) dt + \sigma X(t) dW(t) \end{aligned}$$

となり (8) が成り立つ。

### 3. SDE の数値解法

上の例のように解析解のあるケースは稀で、解を数量的に分析するには数値解析を行う必要がある。常微分方程式にはオイラー法やルンゲ・クッタ法があるように、確率微分方程式にもいく

つかの解法がある。最も基本的な方法はオイラー・丸山スキーム (Euler-Maruyama scheme, EM スキーム) である。(1) の数値解を得るために、区間  $[0, T]$  を離散化して分点を  $t_j = j\Delta t$  ( $j=0, 1, \dots, L$ )、 $\Delta t = T/L$  ( $L$  は正の整数) とする。 $X(t_j)$  の近似値をつぎの漸化式から計算する。

$$X_{j+1} = X_j + a(t_j, X_j)\Delta t + b(t_j, X_j)\Delta W_j$$

$$\Delta W_j = z_j \sqrt{\Delta t}, \quad z_j \sim N(0, 1) \quad (10)$$

拡散項が 0 であれば、EM スキームは常微分方程式に対するオイラー法に他ならない。

[例 3] 幾何ブラウン運動の係数を  $\mu = 2$ ,  $\sigma = 1$  とする。

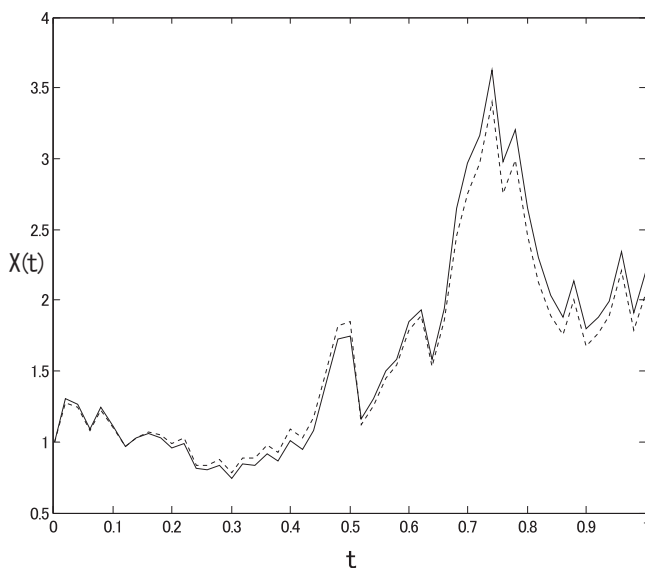
$$\begin{cases} dX(t) = 2X(t)dt + X(t)dW(t), & t \in [0, 1] \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

この方程式の解析解は

$$X(t) = \exp\left(\frac{3}{2}t + W(t)\right)$$

で与えられる。図 2 は EM スキームで計算した近似解を示している。実線は解析解で点線は近似解である。両者のギャップは小さく近似精度は高い。

図 2 幾何ブラウン運動



[例 4] ランジュバン方程式

$$dX(t) = -\mu X(t)dt + \sigma dW(t) \quad (\mu, \sigma > 0) \quad (11)$$

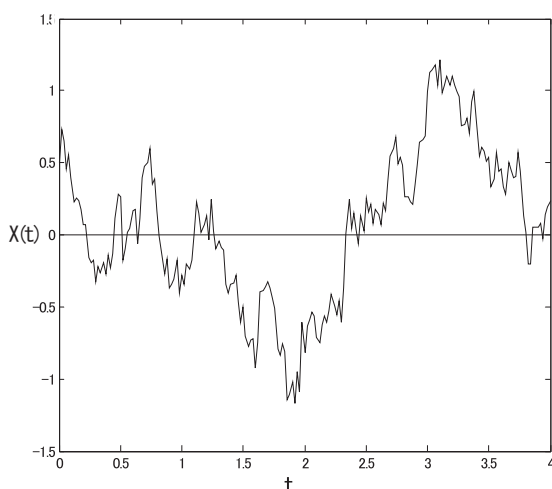
この方程式の解を簡単な式で表すことはできない。図 3 は

$$X_{j+1} = X_j - \mu X_j \Delta t + \sigma \Delta W_j$$

から計算した近似解である。 $\mu = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $X(0) = 0.5$  で、 $\Delta t = 0.02$  としている。金融工学では

オルンシュタイン・ウーレンバック過程 (O-U 過程) と呼ばれる。長期的に  $X=0$  へ戻る傾向がある。

図3 O-U 過程



#### 4. 数値解の収束性

積分の終点  $t = T$  における近似解  $X_L$  と真の解  $X(T)$  は確率的に変化する。次式を満たすあるステップ幅  $\delta_0$  と定数  $C$  が存在するとき、 $X_L$  は  $X(T)$  に強い収束次数  $\gamma$  で収束するという。

$$E(|X(T) - X_L|) \leq C \delta_0^\gamma, \quad \delta_0 \in (0, \delta_0) \quad (12)$$

これは常微分方程式の収束概念を一般化したものであり、拡散項がなければ確定的な定義と一致する。

(2) の  $a(s, X(s))$  と  $b(s, X(s))$  に (7) を適用すると

$$a(s, X(s)) = a(0, X(0)) + \int_0^s P_a(q, X(q)) dq + \int_0^s Q_a(q, X(q)) dW(q)$$

$$b(s, X(s)) = b(0, X(0)) + \int_0^s P_b(q, X(q)) dq + \int_0^s Q_b(q, X(q)) dW(q)$$

となる。これらの式を代入すると (2) は

$$\begin{aligned} X(t) = & X(0) + a(0, X(0)) \int_0^t ds + b(0, X(0)) \int_0^t dW(s) \\ & + \int_0^t \int_0^s P_a(q, X(q)) dq ds + \int_0^t \int_0^s Q_a(q, X(q)) dW(q) ds \\ & + \int_0^t \int_0^s P_b(q, X(q)) dq dW(s) + \int_0^t \int_0^s Q_b(q, X(q)) dW(q) dW(s) \end{aligned} \quad (13)$$

と表される。 $t = t_1$  とおき、2行と3行を無視すると

$$X(t) = X(0) + a(0, X(0)) \Delta t + b(0, X(0)) \Delta W_0$$

となる。これは EM スキームに他ならない。終点まで繰り返して期待値をとると

$$E(|X(T) - X_L|) = C\delta^{\frac{1}{2}}$$

を得る。常微分方程式の場合は  $O(\Delta t)$  となるが、確率微分方程式に対する EM スキームの誤差は  $O(\sqrt{\Delta t})$  と次数は低くなる。近似精度を改善するために、 $Q_b(q, X(q))$  に (7) を適用すると

$$\begin{aligned} X(t) = X(0) &+ a(0, X(0)) \int_0^t ds + b(0, X(0)) \int_0^t dW(s) \\ &+ Q_b(0, X(0)) \int_0^t \int_0^s dW(q) dW(s) + R \end{aligned}$$

となる ( $R$  は剰余項)。ここで

$$Q_b(0, X(0)) \int_0^t \int_0^s dW(q) dW(s) = b \frac{\partial b}{\partial X} \frac{(W(t) - W(0))^2 - (t - t_0)}{2}$$

となる。これよりつぎの斬化式が得られる。

$$\begin{aligned} X_{j+1} = X_j &+ a(t_j, X_j) \Delta t + b(t_j, X_j) \Delta W_j \\ &+ \frac{1}{2} b(t_j, X_j) \frac{\partial b}{\partial X} (\Delta W_j^2 - \Delta t) \end{aligned} \quad (14)$$

これはミルスタイン・スキーム (Milstein scheme) と呼ばれる方法である。誤差を評価すると

$$E(|X(T) - X_L|) \leq C\delta$$

となり強い収束次数は 1 となる。つぎの幾何ブラウン運動を使って収束性を比較しよう。

$$\begin{cases} dX(t) = 2X(t)dt + X(t)dW(t), & t \in [0, 1] \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

ミルスタイン・スキームの斬化式は

$$X_{j+1} = X_j + 2X_j \Delta t + X_j \Delta W_j + \frac{1}{2} X_j (\Delta W_j^2 - \Delta t)$$

である。図 4 は  $T=1$  における平均誤差の対数値をプロットしている。横軸は  $\log_2 \Delta t$  で縦軸は平均誤差の対数値である。100 個の近似解を生成して平均誤差を計算した。ステップ幅は  $\Delta t = 2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-10}$  とする。ステップ幅を広くとると差はないが、狭くとると差は無視できなくなる。 $\Delta t=0.002$  とすると、EM スキームの誤差は 0.2264、ミルスタイン・スキームは 0.0312 となる。回帰直線を当てはめると傾きは 0.709 と 1.054 である。理論的には 0.5 と 1 になるはずであるが、サンプル数が少ないために食い違う。

$b(t, X)$  の偏微分を解析的に求めるのが難しい場合は、つぎの近似式を用いる。

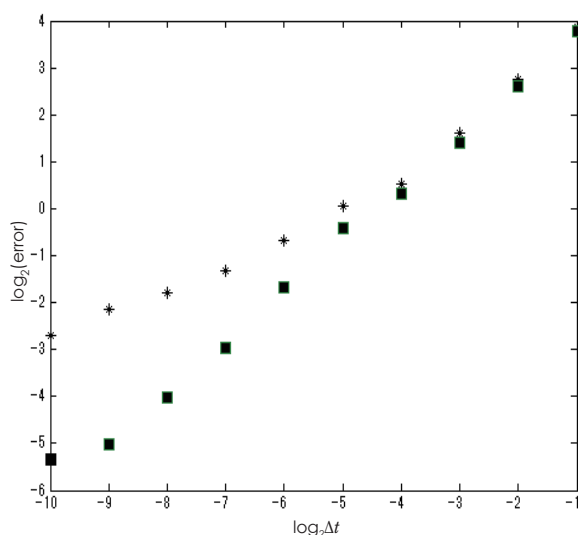
$$\frac{\partial b}{\partial X} \doteq \frac{b(X_j + b\sqrt{\Delta t}) - b}{b\sqrt{\Delta t}}$$

ミルスタインの簡易スキームは

$$X_{j+1} = X_j + a(t_j, X_j) \Delta t + b(t_j, X_j) \Delta W_j$$



図 4 近似解の比較



$$+ \frac{1}{2} [b(t_j, X_j + b(t_j, X_j)\sqrt{\Delta t}) - b(t_j, X_j)] (\Delta W_j^2 - \Delta t) / \sqrt{\Delta t} \quad (15)$$

と表される。

弱い近似 (weak approximation) は、解の期待値、分散、共分散などの分布特性を近似する。任意の多項式  $g$  に対して、次式を満たす正のステップ幅  $\delta_0$  と定数  $C$  が存在するとき、近似解  $X_j$  は  $X(T)$  に弱い収束次数  $\alpha$  で収束するという。

$$|E(g(X(T))) - E(g(T_{\Delta t}, L))| \leq C\delta^\alpha, \delta \in (0, \delta_0) \quad (16)$$

EM スキームの弱い収束次数は 1 となる。EM スキームで  $\Delta W_j$  の代わりにつぎの条件を満たす離散型の確率変数  $\Delta U_j$  を使っても次数は変わらない<sup>3)</sup>。

$$E(\Delta U_j) = E((\Delta U_j)^3) = 0$$

$$E((\Delta U_j)^2) = \Delta t$$

具体的につぎの分布が使われる。

2点分布確率変数

$$P(\Delta U_j = \pm\sqrt{\Delta t}) = \frac{1}{2}$$

3点分布確率変数

$$P(\Delta U_j = \pm\sqrt{3\Delta t}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\Delta U_j = 0) = \frac{2}{3}$$

弱い収束次数 2 のテイラー・スキームは

$$\begin{aligned}
X_{j+1} = & X_j + a\Delta t + b\Delta W_j + \frac{1}{2}b \frac{\partial b}{\partial x} (\Delta W_j^2 - \Delta t) \\
& + \frac{\partial a}{\partial x} b\Delta Z_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} b^2 \right) \Delta t^2 \\
& + \left( \frac{\partial b}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} b^2 \right) (\Delta W_j \Delta t - \Delta Z_j)
\end{aligned} \tag{17}$$

で与えられる。ここで

$$\Delta Z_j \sim N(0, \frac{\Delta t^3}{3}), \quad E(\Delta Z_j \Delta W_j) = \frac{\Delta t^2}{2}$$

である。Platen(1999) は、微分を使わない弱い収束次数2の方法を提案した。

$$\begin{aligned}
X_{j+1} = & X_j + \frac{1}{2} [a(p) + a(X_j)] \Delta t \\
& + \frac{1}{4} [b(q) + b(r) + 2b(X_j)] \Delta W_j \\
& + \frac{1}{4} [b(q) - b(r)] (\Delta W_j^2 - \Delta t) / \sqrt{\Delta t}
\end{aligned} \tag{18}$$

ここで

$$p = X_j + a\Delta t + b\Delta W_j$$

$$q = X_j + a\Delta t + b\sqrt{\Delta t}$$

$$r = X_j + a\Delta t - b\sqrt{\Delta t}$$

である。この他にも高次の収束次数をもつ方法があるが、計算は簡単ではない。詳しくは Klebaner(2012) を参照されたい。

## 5. 数値解の安定性

強収束と弱収束は、有限区間における解の精度に関する概念である。しかし多くの問題で無限区間における性質も重要である。一般に (12) や (16) の上限は  $T$  とともに無限大になるので解の安定性について検討する必要がある。はじめに常微分方程式の安定性について述べる。1変数の常微分方程式を考えよう。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

オイラー法はつぎの漸化式を用いる。

$$x_{j+1} = x_j + f(x_j) \Delta t$$

つぎのテスト方程式を使って安定性を調べる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x & (\lambda < 0) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (19)$$

この方程式の解は

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

である。 $x(t)$  は単調減少であり、 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  となる。オイラー法による数値解は

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= x_j + \lambda x_j \Delta t \\ &= (1 + \lambda \Delta t) x_j \end{aligned}$$

と表される。 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0$  となるためには

$$|1 + \lambda \Delta t| < 1$$

でなければならない。これよりステップ幅が

$$-2 < \lambda \Delta t < 0$$

を満たすならばオイラー法は数値的に安定している。

常微分方程式に対する安定性の概念を確率微分方程式に拡張しよう。(19) に対応するつぎのテスト方程式について考える。

$$\begin{cases} dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW(t) & (\lambda < 0, \mu \geq 0) \\ X(0) = 1 \end{cases} \quad (20)$$

解析解は

$$X(t) = \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right)$$

である。2乗平均ノルム

$$\|X(t)\| = \sqrt{E(X(t)^2)}$$

を用いて安定性を調べる。(20) の解について次式が成り立つ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + \mu^2 < 0 \quad (21)$$

解の漸近的安定性に関して

$$P\left(\lim_{T \rightarrow \infty} |X(T)| = 0\right) = 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \mu^2 < 0 \quad (22)$$

が成り立つ。2乗平均安定であれば漸近安定であるが、逆はいえない。

数値解についても同様の安定性が定義される。EM スキームでは

$$EX_{j+1}^2 = ((1 + \lambda \Delta t)^2 + \mu^2 \Delta t) EX_j^2$$

が成り立つ。したがって2乗平均安定であるためには

$$(1 + \lambda \Delta t)^2 + \mu^2 \Delta t < 1 \quad (23)$$

でなければならない。漸近的安定性については

$$P\left(\lim_{j \rightarrow \infty} |X_j| = 0\right) = 1 \Leftrightarrow E \log |1 + \lambda \Delta t + \mu \sqrt{\Delta t} N(0,1)| < 0 \quad (24)$$

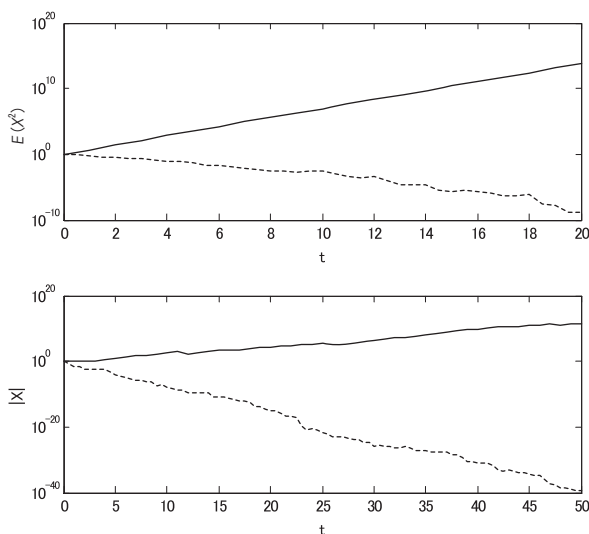
が成り立つ。

つぎの数値例で確認しよう。

$$\begin{cases} dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

図5の上段は $\mu = -3$ 、 $\sigma = 1$ のケースである。初期値を $X_0 = 1$ に固定し、 $[0, 20]$ の区間で生成した50,000個の $X_t^2$ の平均値をプロットしている。 $\Delta t = 1, 0.5$ であり、(23)の左辺は5と0.75となる。実線は $\Delta t = 1$ に対応し、点線は $\Delta t = 0.5$ に対応している。2乗平均の意味で、EMスキームはそれぞれ不安定および安定となる。漸近安定性を調べるために $\mu = -3$ 、 $\sigma = 0.8$ とする。漸近安定性は確率1の事象であり、1つのパスを計算すれば十分である。下段の図で実線は $\Delta t = 1$ 、点線は $\Delta t = 0.5$ に対応している。ステップ幅を広くとると $|X(t)|$ は発散し、狭くとると0に漸近する。安定解を得るには、最低でも500ステップの計算が必要である。

図5 数値解の2乗平均と絶対値



## 6. 多変数の確率微分方程式

これまで1変数の確率微分方程式について検討したが、つぎに多変数の確率微分方程式について考える。

$$\begin{cases} dX_i(t) = a_i(t, X)dt + b_i(t, X)dW_i(t), 0 \leq t \leq T, (i = 1, 2, \dots, n) \\ X_i(0) = X_{i0} \end{cases} \quad (25)$$

1変数の場合と同じような条件の下で唯一の解が存在する。 $dt$ と $dW_1, \dots, dW_n$ は

$$(dt)^2 = 0$$

$$dt dW_i(t) = dW_i(t) dt = 0$$

$$dW_i(t) dW_j(t) = \rho_{ij} dt$$

を満たす。 $\rho_{ij}$  は  $dW_i(t)$  と  $dW_j(t)$  の相関係数である。

伊藤の公式も成り立つ。 $Y = F(t, x)$  は  $t$  に関して 1 階連続微分可能で、 $x, i = 1, 2, \dots, n$  に関して 2 階連続微分可能とする。確率微分  $dY$  は

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} b_i dW_i(t) \end{aligned} \quad (26)$$

で与えられる。ここで  $c_{ij} = \rho_{ij} b_i b_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  である。ブラウン運動の増分  $dW_i$  はつぎのようにして生成する。 $dW_i$  の相関行列を

$$R = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \dots & \rho_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_{n1} & \dots & \rho_{nn} \end{bmatrix}$$

とする。これは対角要素が 1 の対称行列である。 $R$  の特異値分解を

$$R = \Gamma \Lambda \Gamma'$$

とする。 $\Lambda$  は対角行列で、その対角要素は  $R$  の固有値である。 $\Gamma$  は  $R$  の固有ベクトルを横に並べたものである。 $Z_1, \dots, Z_n$  は  $n$  個の独立したブラウン運動で、 $dZ_i dZ_i = dt$ ,  $dZ_i dZ_j = 0, i \neq j$  とする。

$$dW = \Gamma \Lambda^{1/2} dZ$$

とすると

$$\begin{aligned} dW dW' &= \Gamma \Lambda^{1/2} dZ (\Gamma \Lambda^{1/2} dZ)' \\ &= \Gamma \Lambda \Gamma' dt = R dt \end{aligned}$$

となる。

例えば相関行列を

$$R = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 1.0 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 1.0 \end{bmatrix}$$

とすると

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.3862 & 0.7756 & 0.4993 \\ 0.5390 & -0.6290 & 0.5602 \\ -0.7486 & -0.0528 & 0.6610 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0.3100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8038 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8862 \end{bmatrix}$$

であり

$$\begin{bmatrix} dW_1 \\ dW_2 \\ dW_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2150 & 0.6953 & 0.6858 \\ 0.3001 & -0.5640 & 0.7693 \\ -0.4168 & -0.0473 & 0.9078 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \\ dZ_3 \end{bmatrix}$$

となる。

多変数確率微分方程式の例として幾何ブラウン運動について考える。

$$dX_i(t) = a_i X_i(t)dt + X_i(t) \sum_{j=1}^n b_{ij} dW_j(t) \quad (27)$$

$\log X_i(t)$  に伊藤の公式を適用すると

$$\begin{aligned} d \log X_i(t) &= \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} - \frac{1}{2} \left( \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} \right)^2 \\ &= \left( a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \right) dt + \sum_{j=1}^n b_{ij} dW_j(t) \end{aligned}$$

であり

$$X_i(t) = X_i(0) \exp \left\{ \left( a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \right) t + \sum_{j=1}^n b_{ij} W_j(t) \right\}$$

あるいは

$$\log X_i(t) = \log X_i(0) + \left( a_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \right) t + \sum_{j=1}^n b_{ij} W_j(t)$$

となり  $X_i(t)$  は対数正規分布に従う。

## 7. 多変数 SDE の数値解法

解析解がない場合は数値解を求める。区間  $[0, T]$  を離散化して  $t_j = j\Delta t$  ( $j=0, 1, \dots, L$ ) とする。オイラー・丸山スキームでは (25) の数値解をつぎの漸化式から計算する。

$$X_{ij+1} = X_{ij} + a_i(t_j, X_j)\Delta t + \sum_{k=1}^n b_{ik}(t_j, X_j)\Delta W_{kj} \quad (28)$$

これは強い収束次数  $1/2$  をもつことが分かっている。弱い収束次数は  $1$  となる。1変数の場合と同様に、 $\Delta W_{kj}$  をつぎの2点分布確率変数  $\Delta U_{kj}$  で置き換えても収束次数は変わらない。

$$P(\Delta U_{kj} = \pm \sqrt{\Delta t}) = \frac{1}{2}$$

一例として2変数の幾何ブラウン運動を取り上げる。

$$\begin{cases} dX_1(t) = -0.06X_1 dt + 0.05X_1 dW_1(t) \\ dX_2(t) = -0.06X_2 dt + 0.05X_2 dW_2(t) \\ X_1(0) = X_2(0) = 1 \end{cases}$$

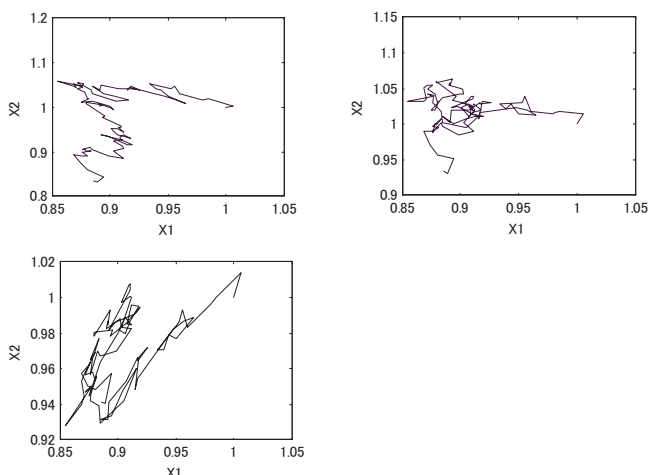
EM スキームを用いて  $0.03$  のステップ幅で  $T=3$  まで計算した。 $dW_i$  は

$$dW_1 = dZ_1$$

$$dW_2 = \rho dZ_1 + \sqrt{1-\rho^2} dZ_2$$

によって生成する。図6は横軸に $X_1$ 、縦軸に $X_2$ をとって近似解をプロットしている。拡散項の係数が0に近いときは $X_1=X_2$ の回りに分布する。実際には $b=0.05$ であり $dW_1$ と $dW_2$ の相関関係を無視できない。左上は $\rho = -0.8$ のケースである。 $X_1$ と $X_2$ の相関係数は0.1729で弱い正の相関がある。右上は $\rho = 0$ に対応し、 $X_1$ と $X_2$ は無相関である。左下の散布図は $\rho = 0.8$ に対応している。相関係数は0.6019と高く正の相関がある。

図6 2変数の幾何ブラウン運動



## 8. 結論

連続時間の確率的な現象を分析する確率微分方程式は経済学でも広く用いられている。一般に確率微分方程式には解析解は存在しないので数値的な方法で近似解を求める。代表的な方法として、オイラー・丸山法とミルスタイン法がある。それぞれ1/2および1の次数で強収束する。もっとも次数の高い方法もあるが、計算は簡単ではない。数値解の分布特性に関する弱収束も重要な概念である。弱収束の観点からは計算を簡略化した方法でもかまわない。常微分方程式と同様に、確率微分方程式でも数値解の安定性を考慮する必要がある。一般にステップ幅を広くとると計算量は少なくなるが、数値的に不安定になる場合がある。少ない計算量で安定性が確保される方法を使用すべきである。多変数の確率微分方程式では攪乱項の相関が重要な意味をもつ。1変数の場合に比べて近似解の計算は煩雑で、安定性の議論も簡単ではない。このような方程式には乱数を用いて近似解を求めるモンテカルロ法が有効であろう。MATLABには正規乱数を生成する関数が組み込まれている。モンテカルロ法はオプション価格の決定に使われる。

ここでは確率微分方程式の基本的な数値解法だけを取り上げたが、他にも後退オイラー法や確率ホイン法などさまざまな解法が提案されている。問題によってはこれらの方法が必要となる。疑似乱数の発生方法とともに今後検討すべき課題である。

注)

- (1) SDEの数値解法については Kloeden and Platen(1999) が基本的な文献である。Platen の展望論文 (1999) は最近のテーマまでカバーしている。成田 (2010)、第6章は SDE の理論と数値解法を分かりやすく説明している。Higham(2001) は実例を用いて具体的に説明している。経済問題への応用は Malliaris and Brock(1981) が詳しい。
- (2) 証明は舟木 (2005) または Klebaner(2012) を参照せよ。
- (3) 証明は Kloeden and Platen(1999) を参照。

#### 参考文献

- [1] 成田清正 (2010) 『例題で学べる確率モデル』 共立出版。
- [2] 舟木直久 (2005) 『確率微分方程式』 岩波書店。
- [3] Higham, D. J. (2001) “An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations”, *SIAM Review*, Vol.43, No.3, 525-546.
- [4] Klebaner F. C. (2012) *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press; 3 edition.
- [5] Kloeden P. E. and E. Platen.(1999) *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin.
- [6] Malliaris, A, G. and W. A. Brock. (1981) *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland.
- [7] Platen, E. (1999) “An Introduction to Numerical Methods for Stochastic Differential Equations”, *Acta Numerica*, Vol.8, 197-246.