フーリエ変換とオプション価格の評価*

Options Pricing Using the Fast Fourier Transform

浅井　　学
Manabu ASAI

概　要

オプション価格の評価では , 例えば , 確率的ボラティリティ変動モデルやジャンプ過程を用いる場合は , 解析的に価格を求めることができない . このような場合に , 高速フーリエ変換を使って価格を計算する方法がある . さらに , 近年の研究では , 複数の資産のモデルにおいて高速フーリエ変換を使う方法が発展しつつある . 本稿では , 高速フーリエ変換によるオプション価格評価方法を紹介し , Asai and McAleer (2015) の多変量ボラティリティ・モデルを使って数値例を求める .

1. はじめに

ブラック・ショールズ (Black and Scholes 1973)（以下 BS）のモデルをはじめ , BS モデルを拡張したモデルは , 現代ファイナンス理論において大きな役割を果たしている . BS モデルでは , 幾何ブラウン運動を用いているため , 対数正規分布の分布関数を使ってヨーロピアン・オプションの価格を評価することができた . しかし , モデルが複雑になるとこのような評価は困難となる . 例えば , Stein and Stein (1991) や Heston (1993) のように確率的ボラティリティ変動モデルを使う場合では , フーリエ変換が用いられている . また Duffie et al. (2000) は , ジャンプをもつ拡散過程のモデルでヨーロピアン・オプションを評価する際に , フーリエ変換の使って評価する方法を提案している . このように , オプション価格の評価にフーリエ変換を用いる方法が発展してきている . フーリエ変換を使う場合 , 高速フーリを使って効率的にオプション価格を評価する方法を考案している . この分野のサーベイとしては , Kwok et al. (2012) がある .

近年 , 多変量確率的ボラティリティ変動モデルの発展が著しい . 連続時間のモデルとしても Gourieroux (2006) はウィッシャート自己回帰モデルを用いて共分散行列をモデル化し , Gourieroux and Sufana (2010) および Asai and McAleer (2015) は Gourieroux (2006) の多変量ボラティリティ・モデルを拡張している . また Muhle-Karbe et al. (2012) は , レヴィ過程を用いて Ornstein-Uhlenbeck 過程のような多変量ボラティリティ・モデルを考案している . これらのモデルを使って , 複数の資産からなるヨーロピアン・オプションの価格を評価する場合には ,

* 創価大学経済学部で長年教鞭を執られてきた板垣有記輔氏にこの研究ノートを捧げたい .

FFT による計算方法を多変量モデル用に拡張する必要がある . このための試みとして , 本稿では Eberlein et al. (2010) によるアプローチを紹介したい .

第2 節では , まず FFT によるオプション価格評価の具体例として , 単一資産の BS モデルについて Carr and Madan (1999) の方法を紹介する . 次に , 複数の資産の場合について , Eberlein et al. (2010) の方法を紹介する . 第3 節では , Asai and McAleer (2015) の多変量ボラティリティ・モデルを使った数値例を紹介する . 最後に第4 節で本稿をまとめる .

2 フーリエ変換によるオプション評価

本節では , 高速フーリエ変換によるオプション評価方法を概観する . まず原資産が 1 つだけのケースを考え , BS のモデルについて , オプション評価公式による価格とによる価格を比較する . 次に , 原資産が複数の場合について , 高速フーリエ変換による評価方法を紹介する .

2.1 ブラック・ショールズのモデル

BS モデルでは , 時点 t における原資産価格 S_t が , 幾何ブラウン運動

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

で記述されるとする . ただし , μ はドリフト項 , dt は時間の微小変化 , σ はボラティリティ , B_t は標準ブラウン運動を表す . いま , 安全資産の利子率を r とし , 満期までで残存期間を T とする . また , 標準正規分布の分布関数を $\Pi(x)$ で表し , E^{Q} をリスク中立測度のもとでの期待値とする . このとき , 時点 t における権利行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプション価格 $C_t^{BS} \equiv e^{-rT}E^Q[\max(S_T - K, 0)]$ とプット・オプション価格 $P_t^{BS} \equiv e^{-rT}E^Q[\max(K - S_T, 0)]$ は ,

$$C_t^{BS} = S_t\Pi(d_1) - Ke^{-rT}\Pi(d_2)$$

$$P_t^{BS} = -S_t\Pi(-d_1) + Ke^{-rT}\Pi(-d_2)$$

で与えられる . ただし ,

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

である .

次に , Carr and Madan (1999) による高速フーリエ変換によるオプション評価方法を紹介する . このアプローチは BS モデルに限定されるわけではない . より一般的なモデルを含められるように , 満期 T における対数価格 $s_T = \ln(S_T)$ について , リスク中立測度のもとで特性関数を

$$\phi_T(u) = E^Q[\exp(ius_T)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} q_T(s) ds \tag{1}$$

とする . ただし , $q_T(s)$ は対数価格 s_T のリスク中立密度関数である . 対数行使価格を $k = \ln(K)$ とするとき , コール・オプション価格は

$$\phi_T(u) = E^Q[\exp(ius_T)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} q_T(s) ds \tag{2}$$

と表せる .

ここで Carr and Madan (1999) は , 正の定数 α に対して , 修正コール・オプション価格

$$c_T(k) = \exp(\alpha k) C_T(k)$$

を定義し , そのフーリエ変換を

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} c_T(k) dk$$

を考えた . するとフーリエ逆変換により

$$C_T(k) = \frac{\exp(-\alpha k)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \psi_T(v) dv = \frac{\exp(-\alpha k)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ivk} \psi_T(v) dv \tag{3}$$

を得る . ここで , $C_T(k)$ は実数なので , $\psi_T(v)$ は虚数部分では奇関数であり , 実数部分は偶関数であることに注意してほしい . なお , Carr and Madan (1999) は $\psi_T(v)$ の解を求めており , それは

$$\psi_T(v) = \frac{e^{-rT}\phi_T(v-(\alpha+1)i)}{\alpha^2+\alpha-v^2+i(2\alpha+1)v}$$

で与えられる .

さて FFT では , 次のように和を計算する .

$$w(k) = \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x(j), \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

ここで , N は通常 2 のべき乗である . 従って $v_j = \eta(j-1)$ とおけば

$$C_T(k) \simeq \frac{\exp(-\alpha k)}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{iv_j k} \psi_T(v_j) \eta$$

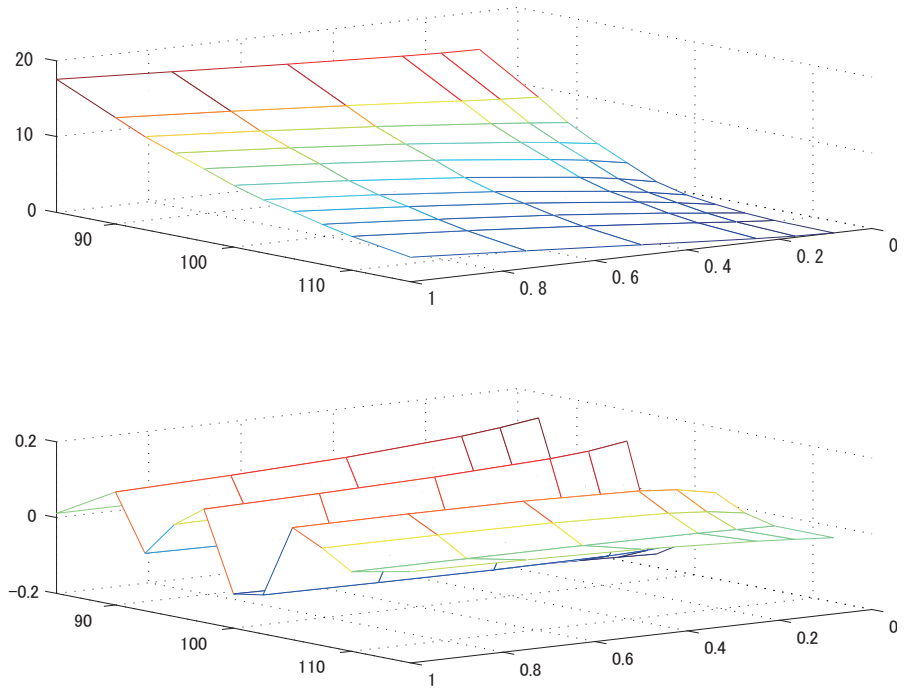
を考えればよい . さらに $b = \frac{1}{2}N\lambda$ として , $k_u = -b + \lambda(u-1)$ $(u = 1, 2, \ldots, N)$ とおけば , 対数行使価格は区間 $[-\frac{1}{2}N\lambda, \frac{1}{2}N\lambda]$ に収まるような値をとり変化する . このように定義すれば

$$C_T(k_u) \simeq \frac{\exp(-\alpha k_u)}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \psi_T(v_j) \eta \tag{4}$$

となる . 以上のように , Carr and Madan (1999) は特性関数と FFT を使って , オプション価格を計算する方法を開発した .

ここで FFT によるオプション評価方法の数値例として , BS モデルを使い C_t^{BS} と比較を試みたい . まず行使価格として K = [85, 90, 92.5, 95, 97.5, 100, 102.5, 105, 107.5, 110, 115] とし , 満期までの残存期間を T = [1/12, 2/12, 0.25, 0.5, 0.75, 1], 安全資産の利子率（年率）を r = 0.006, ボラティリティを σ = 0.2, 時点 0 の原資産価格を S_0 = 100 とする . 図 1 の上部には C_t^{BS} の値が図示されている . これに対し , 図 1 の下部には FFT によるコール・オプション価格 C_t^{FFT} から C_t^{BS} を引いた値 $(C_t^{FFT} - C_t^{BS})$ が示されている . これにより , 数値計算の誤差は 1% 程度であるのがわかった . な

図 1: BS モデルのコール・オプション価格



注：図の上部は C_t^{BS} の値を図示したものであり，図の下部は $C_t^{FFT} - C_t^{BS}$ を図示したものである．

お $\alpha = 1.1$ としたが，数値を変えても大きな変化はみられなかった．Carr and Madan (1999) は，シンプソンの公式によるウェイトを使って，数値計算を改善する方法も示しているが，ここでは詳しく述べない．

ここでは BS モデルについて，オプション評価公式による価格と FFT による価格を比較した．その結果，FFT で計算された価格は比較的高い精度をもつことがわかった．

2.2 複数の原資産

ここでは，原資産が複数の場合について，高速フーリエ変換による評価方法として，Eberlein et al.(2010) の方法を紹介する．また，BS モデルのような幾何ブラウン運動だけでなく，一般的な枠組みを考える．まず，d 次元の原資産の価格ベクトルを $S_t = (S_t^1, \ldots, S_t^d)$ とする．初期時点の価格 $S_0 = (S_0^1, \ldots, S_0^d)$ に対し対数価格の増加分を $(Y_t^1, \ldots, Y_t^d)$ とすると，$S_t = (S_0^1 \exp(Y_t^1), \ldots, S_t^d \exp(Y_t^d))$ と書くことができる．利子率を r とし，価格の現在価値のプロセス $\{e^{-rt} S_t\}_{t \in [0,T]}$ が，ある測度 Q のもとでマルチンゲールとなると仮定する．

満期が T でペイオフが $f(Y_T + s)$ のヨーロピアン・オプションの価格 $E_Q\left(e^{-rT} f(Y_T + s)\right)$ の評価を考える．まず Y_T の積率母関数を $\Phi_{Y_T}(\theta) = E[\exp(\theta' Y_t)]$ とし，f のフーリエ変換を $\hat{f}$ と表記

する . また同じ次元の複素数ベクトル u と v について , エルミート内積を $< u,v >= \Sigma_i u_i v_i$ で定義する .

Eberlein et al. (2010) の定理3.2 により

$$E_Q\left(e^{-rT}f(Y_T+s)\right)=\frac{e^{<\epsilon,s>-rT}}{(2\pi)^d}\int_{\Re^d}e^{i<u,s>}\Phi_{Y_T}(\epsilon+iu)\hat{f}(i\epsilon-u)du \tag{5}$$

と変換できる . ただし $s=(\log(S_0^1),\ldots,\log(S_0^d))'$ である . また , d 次元ベクトル ϵ は , Φ_{Y_T} と $\hat{f}$ の領域の積集合に含まれていなければならない .

以上より , ペイオフ関数のフーリエ変換がわかれば , 様々な原資産の価格モデルについて , Eberlein et al. (2010) の結果を使ってオプション価格を求めることができる .

ここで様々なペイオフ関数とそのフーリエ変換を紹介したい . 詳しくは , Eberlein et al. (2010) や Muhle-Karbe (2012) を参照されたい .

例1　行使価格 K のプレイン・バニラ・コール・オプションのペイオフ関数は $f(x)=(e^x-K)^+$ であり , そのフーリエ変換は $z\in\mathbb{C}$ について

$$\hat{f}(z)=\frac{K^{1+iz}}{iz(1+iz)},\quad \mathrm{Im}(z)>1$$

で与えられる . また , プット・オプションのペイオフ関数は $x\in\Re^d$ であり , そのフーリエ変換は $z\in\mathbb{C}$ について

$$\hat{f}(z)=\frac{K^{1+iz}}{iz(1+iz)},\quad \mathrm{Im}(z)\in(-\infty,0)$$

で与えられる .

例2　行使価格が K のとき d 個の資産の最小値のコール・オプションのペイオフ関数は , $x\in\Re^d$ について

$$f(x)=(e^{x_1}\wedge\cdots\wedge e^{x_d}-K)^+$$

である . このときペイオフ関数のフーリエ変換は , $z\in\mathbb{C}^d$ について

$$\hat{f}(z)=\frac{K^{1+i\sum_{k=1}^d z_k}}{(1+i\sum_{k=1}^d z_k)\prod_{k=1}^d(iz_k)}$$

で与えられる . ただし z の値は , ある $k(1\le k\le d)$ について $\mathrm{Im}(z_k)>0$ かつ $\mathrm{Im}(\sum_{k=1}^d z_k)>1$ という条件を満たさなければならない .

例3　行使価格が K のとき d 個の資産の最大値のプット・オプションのペイオフ関数は , $x\in\Re^d$ について

$$f(x)=(K-e^{x_1}\vee\cdots\vee e^{x_d})^+$$

である . このときペイオフ関数のフーリエ変換は , $z\in\mathbb{C}^d$ について

$$\hat{f}(z) = \frac{K^{1+i\sum_{k=1}^{d} z_k}}{(1+i\sum_{k=1}^{d} z_k)\prod_{k=1}^{d}(iz_k)}$$

で与えられる . ただし , z の値はすべての $k(1 \leq k \leq d)$ について $\mathrm{Im}(z_k) < 0$ でなければならない .

例 4 単一資産のペイオフ関数を使って , 複数資産のペイオフ関数をつくることもできる . ペイオフ関数が

$$f(x) = \prod_{k=1}^{d} f_k(x_k)$$

であるならば , そのフーリエ変換は

$$\hat{f}(z) = \prod_{k=1}^{d} \hat{f}_k(z_k)$$

となる . ただし , z はそれぞれのペイオフ関数に基づいて適切な条件を満たさなければならない .

例 5 行使価格 K について , バスケット・プット・オプションのペイオフ関数は $f(x) = (K - \sum_{k=1}^{d} x_k)^+$ であり , そのフーリエ変換は $z \in \mathbb{C}^d$ について

$$\hat{f}(z) = \frac{K^{1+i\sum_{k=1}^{d} z_k}\prod_{k=1}^{d}\Gamma(iz_k)}{\Gamma(2+i\sum_{k=1}^{d} z_k)}$$

で与えられる . ただし , z の値はすべての $k(1 \leq k \leq d)$ について $\mathrm{Im}(z_k) < 0$ でなければならない .

例 6 行使価格 K について , スプレッド・コール・オプションのペイオフ関数は $f(x) = (e^{x_1} - e^{x_2} - K)^+$ であり , そのフーリエ変換は $z \in \mathbb{C}^2$ について

$$\hat{f}(z) = \frac{K^{1+i\sum_{k=1}^{d} z_k}\prod_{k=1}^{d}\Gamma(iz_k)}{\Gamma(2+i\sum_{k=1}^{d} z_k)}$$

で与えられる . ただし , z の値は $\mathrm{Im}(z_1) > 1$ かつ $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) > 1$ という条件を満たさなければならない . また $\Gamma(\cdot)$ は複素ガンマ関数である .

ここでは単一資産の例を 1 つ , 複数資産に関する例を 5 つ紹介した . 上述のように , ペイオフ関数のフーリエ変換がわかれば , (5) 式によりオプション価格を求めることができる . なお , プット・オプションまたコール・オプションのいずれかの価格がわかれば , プット・コール・パリティにより , 他方の価格を求めることもできる .

最後に , オプション価格の具体的な計算方法について説明する . まず (5) 式の積分の最初に出てくる $e^{i<u,s>}$ という部分に注目してほしい . 単一資産について考えた BS モデルのケースと 2 つ異なる点がある . 第1 に , i の前にマイナス記号がついていない点である . このためフーリエ変換

ではなく, 逆フーリエ変換を用いて計算することになる. 第2に, 行使価格 K の対数値ではなく, 原資産価格の初期値の対数ベクトル s が使われている点である. この時の問題点は, 通常 s の値が, フーリエ変換で求められる値を越えてしまうことにある. このため Hurd and Zhou (2010) は, 次のような計算方法を紹介している. 簡単のため, 以下では $d = 2$ とする.

まず Hurd and Zhou (2010) に沿って, 複素数ベクトル u について転置 u' は非共役転置を表すことにする. 2重積分を2重和で近似する際の格子として, 適切な N と η を使って

$$u(l) = (u_1(l_1), u_2(l_2))', \quad l = (l_1, l_2) \in \{0, 1, \dots, N-1\}^2, \quad u_i(l_i) = -\bar{u} + \eta l_i$$

とする. ただし $\bar{u} = N\eta/2$ である. FFT では, N を 2 のべき乗とするとき最も効率的である. また積分を近似する際の区間 $[-\bar{u}, \bar{u}]$ について, η はその分割幅であることに注意してほしい. 同様に, s に対応して次のような格子

$$s(h) = (s_1(h_1), s_2(h_2))', \quad h = (h_1, h_2) \in \{0, 1, \dots, N-1\}^2, \quad s_i(h_i) = -\bar{s} + \lambda h_i$$

を考える. ただし $\bar{s} = N\lambda/2$ である. また, 逆フーリエ変換に対応するように, 分割の区間 λ を $\bar{u} = N\eta/2$ とする. ここで, s の各要素が区間 $[-\bar{s}, \bar{s}]$ に収まるようにしなければならない. 最後に, 離散型 FFT でよく使われるように N が偶数であれば

$$iu(l)'s(h) = i\pi(l_1 + l_2 + h_1 + h_2) + 2\pi i l h'/N \pmod{2\pi i}$$

であり, $E_Q\left(e^{-rT} f(Y_T + s)\right)$ である. 以上の設定のもとで (5) 式の近似は

$$E_Q\left(e^{-rT} f(Y_T + s)\right) \approx \frac{\eta^2 e^{-rT}}{(2\pi)^2} \sum_{l_1=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} e^{i(u(l)+i\epsilon)s(h)'} \Phi_{Y_T}(\epsilon + iu(l)) \hat{f}(i\epsilon + u(l))$$

$$= (-1)^{h_1+h_2} e^{-rT} \left(\frac{\eta N}{2\pi}\right)^2 e^{-\epsilon s(h)'} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{l_1=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} e^{2\pi i l h'/N} H(l)\right]$$

で与えられる. ただし

$$H(l) = (-1)^{l_1+l_2} \Phi_{Y_T}(\epsilon + iu(l)) \hat{f}(i\epsilon + u(l))$$

である. 例えば, MATLAB などの計算ソフトには, FFT を使って2次元逆離散フーリエ変換の値計算する関数がある. すなわち, l の値に対応した $H(l)$ の行列を使って 2 次元逆離散フーリエ変換を適用し, 初期値 s に最も近い $s(l)$ に対応する箇所が, 上式の大括弧 [ ] の値である. 以上の手順で, オプション価格 $E_Q\left(e^{-rT} f(Y_T + s)\right)$ を計算することができる.

3 数値例

ここでは Asai and McAleer (2015) の非対称マルチファクター・ウィッシャート・ボラティリティ・モデルを紹介する.

まず n 個の資産について, 対数価格過程のベクトルを p_t とする. Gourieroux (2006) や Gourieroux and Sufana (2010) はウィッシャート・ボラティリティ・モデルとして

$$dp_t = \mu^*(\Omega_t)dt + \Omega_t^{1/2}dB_{0t},$$

を考えている．ただし，Ω_t は n 次元の正定符号行列でウィッシャート自己回帰 (WAR, Wishart AutoRegression) 過程

$$d\Omega_t = (\nu I_n + \Omega_t\Phi' + \Phi\Omega_t)dt + \Omega_t^{1/2}dB_{1t}^M C^{1/2} + C^{1/2}dB_{1t}^M\Omega_t^{1/2},$$

に従うとする．ここで Φ は n 次元の正方行列であり，C は n 次元の正定符号行列，ν は自由度である．表記として WAR(ν, Φ, C) と書くことにする．また，$\mu^*(\Omega_t)$ は n 次元ベクトルで，Ω_t の関数である．B_{0t} は n 次元の標準ブラウン運動のベクトルであり，B_{1t}^M は標準ブラウン運動からなる n 次元の正方行列である．Gourieroux and Sufana (2010) は，$\mu^*(\Omega_t)$ を通して，ボラティリティのフィードバック効果をモデル化している．

Asai and McAleer (2015) では，上記のように Ω_t を特定するのではなく，

$$\Omega_t = \Theta'\left(\sum_{k=1}^{K} V_{kt}\right)\Theta, \tag{6}$$

$$dV_{kt} = (\nu_k I_n + V_{kt}\Phi_k' + \Phi_k V_{kt})dt + V_{kt}^{1/2}dB_{kt}^M + dB_{kt}^M V_{kt}^{1/2}, \tag{7}$$

として，マルチファクター WAR 過程を考えている．ただし，B_{kt}^M は標準ブラウン運動からなる n 次元の正方行列である．この特定化では，それぞれの V_{kt} が $\mathrm{WAR}(\nu_k,\Phi_k,I_n)$ 過程に従っていることがわかる．

さらに Asai and McAleer (2015) では，非対称性やフィードバック効果を考えて，

$$dp_t = \mu^*(\Omega_t)dt + du_t, \tag{8}$$

としている．ここでフィードバック効果 $\mu^*(\Omega_t)$ は

$$\mu^*(\Omega_t) = (\mu_1 + \mathrm{tr}(M_1\Omega_t), \ldots, \mu_n + \mathrm{tr}(M_n\Omega_t))', \tag{9}$$

で定義される．ただし，μ_i と M_i (i = 1, . . . , n) は，それぞれスカラーのパラメータと n 次元の対称なパラメータ行列である．さらに (8) 式の右辺第2項では，レバレッジ効果として

$$du_t = \sum_{k=1}^{K}\Theta' V_{kt}^{1/2}R_k\mathrm{vec}(dB_{kt}^M) + \left(\sum_{k=1}^{K}\Theta' V_{kt}^{1/2}(I_n - R_kR_k')V_{kt}^{1/2}\Theta\right)^{1/2}dB_t, \tag{10}$$

と特定化している．ただし B_t は n 次元の標準ブラウン運動ベクトルであり，R_k (k = 1, . . . ,K) は $n \times n^2$ のパラメータ行列である．なお $(I_n - R_kR_k')$ は正定符号行列という制約が必要である．このとき $\mu^*(\Omega_t)$ となる．Asai and McAleer (2015) ではパラメータの数を減らすために，ρk を n 次元ベクトルとして $R_k = (I_n \otimes \rho_k')$ としている．このモデルでは，$E[\mathrm{vec}(dB_{kt}^M)du_t'|\Omega_t] = \Theta' V_{kt}^{1/2}R_k dt$ であるので，p_t の変化が R_k を通じて V_{kt} に変化を及ぼす．非対称マルチファクター・ウィッシャート・ボラティリティ・モデルの積率母関数は，Asai and McAleer (2015) の系3に与えられている．

非対称マルチファクター・ウィッシャート・ボラティリティ・モデルは，リスク中立測度 Q では

$$E_t^Q(dp_t) = r\iota - \frac{1}{2}(e_1'\Omega_t e_1, \ldots, e_n'\Omega_t e_n)'dt$$

$$E_t^Q(d\Omega_t) = E_t(d\Omega_t) + \mathrm{Cov}[\mathrm{tr}(C_t d\Omega_t), d\Omega_t]$$
$$= E_t(d\Omega_t) + 2(\Omega_t \Xi_t \Theta'\Theta + \Theta'\Theta\Xi_t'\Omega_t)dt,$$

となる．ただし，E_t^Q はリスク中立測度 Q のもとでの条件付き期待値であり，ι すべての要素が 1 の n 次元ベクトルである．また，e_i は，i 番目の要素が 1 で，それ以外の要素はゼロであるような n 次元ベクトルである．収益率に関する式のリスク・プレミアムはマルチンゲール条件から固定されるが，共分散行列に関する式で任意に固定できる．Gourieroux and Sufana (2010) にならいボラティリティ・リスク・プレミアムが一定であると仮定すると $\Xi_t = \bar{\Xi}$ となる．このとき上の式は

$$E_t^Q(dp_t) = \left(\bar{\mu}_1 + \mathrm{tr}(\bar{M}_1\Omega_t), \ldots, \bar{\mu}_n + \mathrm{tr}(\bar{M}_n\Omega_t)\right)' dt$$

$$E_t^Q(d\Omega_t) = E_t(d\Omega_t) + \mathrm{Cov}[\mathrm{tr}(C_t d\Omega_t), d\Omega_t]$$
$$= \sum_{k=1}^{K} \Theta'(\nu_k I_n + V_{kt}\bar{\Phi}_k' + \bar{\Phi}_k V_{kt})\Theta dt,$$

となる．ただし $\bar{\mu}_i = r$ ，$\bar{M}_i = -\frac{1}{2}e_i e_i'$ ，$\bar{\Phi}_k = \Phi + 2\Theta\bar{\Xi}\Theta'$ である．リスク中立測度のもとで積率母関数を考えるには，Asai and McAleer (2015) の系3 で E_t を E_t^Q とすればよい．すなわち，パラメータを置き換えるだけでよい．

以下の数値例では，$n = 2$ として次の 4 つのケースを考える．

- **1WSV** は，$k = 1$ および $R_k = O$, $M_i = O$ とした一番単純なモデルである．
- **1WSV-F** は，$k = 1$ および $M_i = O$ としたモデルで，レバレッジ効果の含んでいる．
- **2WSV** は，$k = 2$ および $R_k = O$ and $M_i = \mathrm{O}$ としたモデルで，2 つのボラティリティ・ファクターを含んでいる．
- **2WSV-L** は，$k = 2$ および $M_i = \mathrm{O}$ としたモデルで，リバレッジ効果と 2 つのボラティリティ・ファクターを含んでいる．

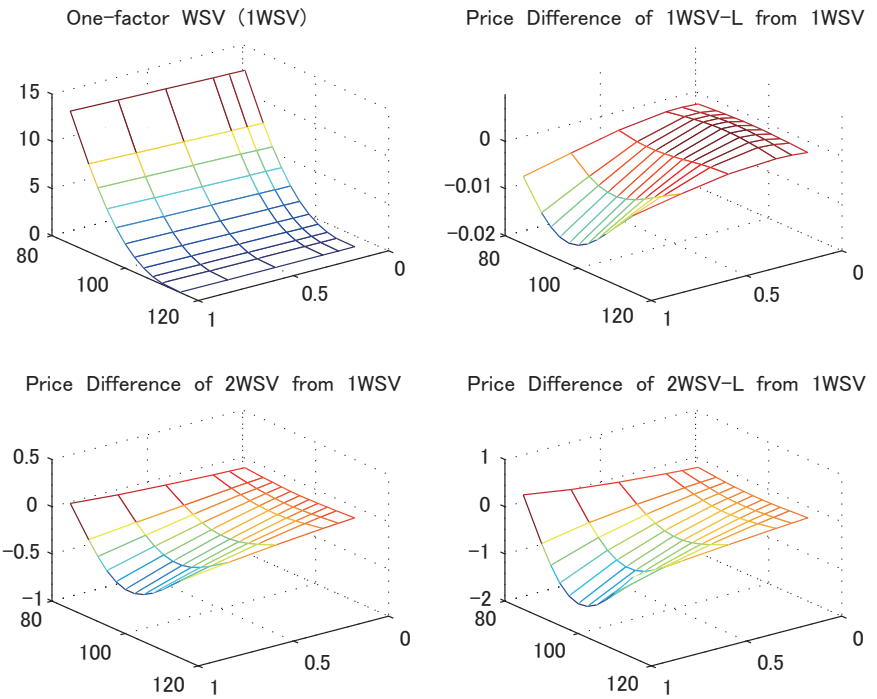
これらのモデルをリスク中立測度におけるモデルに変換すれば，リスク中立測度のもとでの積率母関数が得られる．あとは，前節で説明した方法でオプション価格を評価できる．

最後に，ペイオフ関数が $f(p) = (e^{p_1} - e^{p_2} - K)^+$ のスプレッド・コール・オプションを考える．行使価格を

$$K = \{85, 90, 92.5, 95, 97.5, 100, 102.5, 105, 107.5, 110, 115\},$$

とし，満期を $T = \{\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00\}$. とする．また安全資産の利子率を 0.006 とし，原資産価格の初期値を $(e^{p_{01}}, e^{p_{02}}) = (195, 100)$ とした．非対称マルチファクター・ウィッシャート・ボラティリティ・モデルのパラメータの値について，Asai and McAleer (2015) の表2 と表4 に示さ

図2：スプレッド・コール・オプションの価格



れている値を用いた . これは , 1996年7月1日から 2012 年9月28日までの米国の NASDAQ 100 と S&P 500 の日次収益率と実現共分散を使って , モデルを推定した結果である . 図2 には , Eberlein (2010) の方法で評価したオプション価格が示されている . 単純な 1WSV モデルに , 2 番目のボラティリティファクターを含めたり , レバレッジ効果を含めたりすることで , オプション価格に変化が出てくることがわかる .

4 まとめ

本稿では , FFT によるオプション価格評価方法に注目し , 単一資産モデルに関して Carr and Maden(1999) の方法を , 複数の資産のモデルについて Eberlein et al. (2010) の方法を紹介した . 数値例として , Asai and McAleer (2015) の考案した非対称マルチファクター・ウィッシャート・ボラティリティ・モデルから 4 種類のモデルを選び , FFT によりスプレッド・コール・オプションを評価した .

複数の資産によるオプションは , まだまだ普及していない . 今後 , さまざまな複数資産のモデルが出現し , オプション価格の評価も機械的にできるようになれば , 新たなリスク・ヘッジの方法として大きな役割を果たすであろうと期待される .

参考文献

Asai, M., and M. McAleer (2015), "Leverage and Feedback Effects on Multifactor Wishart Stochastic Volatility for Option Pricing", *Journal of Econometrics* 189, 251 - 262.

Black, F., and M. Scholes (1973), "The Pricing of Option and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, **81**, 637 - 659.

Carr, P., and D.B. Madan (1999), "Option Valuation Using The Fast Fourier Transform", *Journal of Computational Finance*, **2**, 61 - 73.

Duffie, D., J. Pan, and K. Singleton (2000), "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump Diffusions", *Econometrica*, **68**, 1343 - 1376.

Eberlein, E., K. Glau, and A. Papapantoleon (2010), "Analysis of Fourier Transform Valuation Formulas and Applications", *Applied Mathematical Finance*, **17**, 211 - 240.

Gourieroux, C. (2006), "Continuous Time Wishart Process for Stochastic Risk", *Econometric Reviews*, 25, 177 - 217.

Gourieroux, C. and R. Sufana (2010), "Derivative Pricing with Wishart Multivariate Stochastic Volatility", *Journal of Business & Economic Statistics*, **28**, 438 - 451.

Heston, S. (1993), "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, **6**, 327 - 343.

Hurd, T.R., and Z. Zhou (2010), "A Fourier Transform Method for Spread Option Pricing", *SIAM Journal of Financial Mathematics*, **1**, 142 - 157.

Kwok, Y.K., K.S. Leung, and H.Y. Wong (2012), "Efficient Options Pricing Using the Fast Fourier Transform", in: J.-C. Duan, W.K. Härdle, and J.E. Gentle (eds.), *Handbook of Computational Finance*, Springer-Verlag, New York, 579 - 604.

Muhle-Karbe, J., O. Pfaffel, and R. Stelzer (2012), "Option Pricing in Multivariate Stochastic Volatility Models of OU Type", *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **3**, 66 - 94.

Stein, E., and J. Stein (1991), "Stock Price Distribution with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", *Review of Financial Studies*, **4**, 727 - 752.