確率演算法と確率的最適制御の経済学への応用

Stochastic Calculus and Stochastic Optimal Control
with Application to Economics

板垣有記輔
Yukio Itagaki

Ⅰ 序

現実の各個別経済主体の各財・各用についての需給計画の立案は，それが将来に関する不確実・不完全な情報の下で行なわれざるを得ないことに一つの大きな特色を有する．個別経済主体は，将来財については言うまでもなく，それが将来市場を持たない財ないし用役についての現在の需給計画を立案するときも，やはりその意思決定に際してそれを最適たらしめるために，将来に関する情報を不可欠とするのである．そこで制約されるであろう将来の環境に関する情報は，過去および現在の情報を，各個別経済主体にとってそれぞれ必要とする程度に応じて，すなわちそれによって直接・間接にもたらされるであろう利得とこれを入手するに要する費用との兼合で，収集・処理することによって得る．このようにして獲得した情報を手掛りとして，そこで制約されるであろう将来の経済環境の下で最も有利でありたいとの観点から，将来の各時点の各財・各用役の需給計画を立案する．合理的な個別経済主体は，もはや変更不可能となった過去の諸決定とそれらのもたらした諸結果を前提として，そこで制約される現在の経済環境の下で，将来時点においてそうであろう最適な各財・各用の需給計画と整合的であるように，現在の各財・各用の需給計画を立案する他はないからである．言わば，過去の歴史と将来についての知識とが，各個別経済主体の現在とるべき行動を規定するのである．言うまでもなく，各個別経済主体にとっての，現在から将来への時間的長さは，彼の時間的視野ないし展望能力と彼の住む世界とに強く依存せざるを得ず，各個別経済主体毎にそれぞれ異なるものである．

以上が一般的に記述された，不確実性下の個別経済主体の各財・各用の需給計画決定の手続きである．一般的記述は一般的ではあるが，おうおうにして具体的な興味ある結論に乏しい．

そこで，少からず限定的・特定的ではあるが，そこに規定される経済環境の時間的展開に付随する不確実性をウィナー過程として捉え，経済環境の動態を，平均的趨勢とこれを乱すランダム項としてのウィナー過程とが相俟って生成する動学的過程（伊藤型確率微分方程式の解過程）として考える．勿論，各個別経済主体は，自己にとって最適なるものにせんとそれが可能ならば環境に働きかけ，制御しようとするであろうから，動学的過程は，制御変数を包含するものでなければならない．最適制御は，伊藤型確率微分方程式で記述される動学的過程の中で，それを最大化すべき期待利得なる目的関数が与えられてはじめて定め得るものであるから，それは確率的最適制御である他はない．

確率過程の解明に不可欠な用具として，伊藤によって確立された確率的演算法があるが，これらは，あくまで厳密的であろうとして高度に数学的である．そのため，それを本来は最も必要とするであろう経済学徒にそれを疎遠で近寄り難いものとしている．

本稿の目的は，数学的厳密さを少しく犠牲にするという代償を払って確率的演算法と確率的最適制御則を，最も初等的に導出すること，これである．新しい結果は無いが，これを初等的に導出することに若干の工夫があるであろう．

Vにおいて，伊藤の補題および確率的最適制御の経済問題への一つの応用として，マートンらの最適消費・資産選択問題をとりあげる．そして，われわれのようにダイナミック・プログラミングの最適性の原理に基づいて確率的最適制御則を導出するという手順をふんでも，伊藤の補題を媒介として，富のシャドウ・プライスの動学的過程の特性を解明できることを示す．

II ウィナー過程（定義）

Ω を任意の空間（標本空間），A をその上の完全加法族，P を A 上で定義された確率測度とするとき，Ω, A, P をあわせて考えて，(Ω, A, P) を確率空間という．標本点（確率パラメーター）$\omega \in \Omega$ の可測実関数 $z(\omega)$ を Ω 上の確率変数という．時間 T を R またはその部分区間とし，確率変数が $t \in T$ に依存するとき，これを $z(t, \omega)$ と記し，$\{z(t,\omega); t \in T, \omega \in \Omega\}$ を連続パラメーターの確率過程という．標本点 ω を $\omega^0 \in \Omega$ に固定すれば，$z(t, \omega^0)$ は t の関数となり，$\{z(t, \omega^0); t \in T\}$ を見本過程または確率過程の道という．ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して，道 $z(t, \omega)$ が確率1で連続であるとき，$\{z(t, \omega); t \in T, \omega \in \Omega\}$ は連続な確率過程という．

任意の時点 $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ に対して，$z(t_0, \omega)$, $z(t_1, \omega) - z(t_0, \omega)$, $z(t_2, \omega) - z(t_1, \omega)$, $\cdots$, $z(t_n, \omega) - z(t_{n-1}, \omega)$ が互いに独立であるとき，$\{z(t, \omega); t \in T, \omega \in \Omega\}$ は独立増分過程（加法過程）であるという．

ウィナー過程（ブラウン運動）とは，つぎの性質をみたす確率過程 $\{z(t, \omega); t \in T, \omega \in \Omega\}$ である（伊藤［10］，p. 279，渡辺［17］，p. 6 など参照）．

［Ⅰ］ $\{z(t,\ \omega);\ t\in T,\ \omega\in\Omega\}$ は連続な確率過程，

［Ⅱ］ $\{z(t,\ \omega);\ t\in T,\ \omega\in\Omega\}$ は独立増分過程，

［Ⅲ］ 確率変数 $\{z(t,\ \omega)-z(s,\ \omega)\}$ は，平均値 $E\{z(t,\ \omega)-z(s,\ \omega)\}=0$，分散 $V\{z(t,\ \omega)-z(s,\ \omega)\}=E\{(z(t,\ \omega)-z(s,\ \omega))^2\}=\sigma^2|t-s|$ で与えられる正規分布 $N(0,\ \sigma^2|t-s|)$ に従い，その確率密度関数 $p(|t-s|,\ z_t-z_s)$ は，

$$p(|t-s|,\ z_t-z_s)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi|t-s|}}\exp\left[-\frac{(z_t-z_s)^2}{2\sigma^2|t-s|}\right],$$

但し σ は正の定数，

［Ⅳ］ $P(z(0,\ \omega)=0)=1.$

$\sigma=1$ で，［Ⅰ］～［Ⅳ］をみたす確率過程を標準ウィナー過程（標準ブラウン運動）という．［Ⅱ］～［Ⅳ］よりウィナー過程の $z(t,\ \omega)$ は平均 $E(z_t)=0$，分散 $V(z_t)=E(z_t^2)=\sigma^2t$ に与えられる正規分布 $N(0,\ \sigma^2t)$ に従い，その確率密度関数 $p(z_t)$ は，

$$p(z_t)=p(t-0,\ z_t-z_0)=p(t,\ z_t)$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{z_t^2}{2\sigma^2t}\right) \qquad (1)$$

となり，$t>s$ なるとき条件 $z(s,\ \omega)=z_s$ のもとで $z(t,\ \omega)$ は，条件付期待値 $E(z_t|z_s)=z_s$，条件付分散 $V(z_t|z_s)=E\{[z_t-E(z_t|z_s)]^2|z_s\}=\sigma^2(t-s)$ に従い，その条件付確率密度関数 $p(z_t|z_s)$ は，

$$p(z_t|z_s)=p(t-s,\ z_t-z_s). \qquad (2)$$

III 確率演算法

ウィナー過程 $\{z(t,\ \omega);\ t\in T,\ \omega\in\Omega\}$ を，簡単化のため，以下においては $z(t)$ と記し，$z(t)$ の確率微分 $dz(t)$ を $dt>0$ に対して，

$$dz(t)=z(t+dt)-z(t) \qquad (3)$$

と定義する．

$t>s$ なるとき平均値 0，分散 $\sigma^2(t-s)$ で与えられる $z(t)-z(s)$ の正規分布 $N(0,\ \sigma^2(t-s))$ において，平均値のまわりの k 次のモーメント $m_k=E\{[(z(t)-z(s))-0]^k\}=E\{[z(t)-z(s)]^k\}$ は，

$$m_{2n+1}=0,\quad (n=0,1,2,\cdots), \qquad (4)$$

$$m_{2n}=(2n-1)!!(\sigma\sqrt{t-s})^{2n}=\frac{(2n)!}{n!2^n}(\sigma\sqrt{t-s})^{2n},\quad (n=1,2,\cdots), \qquad (5)$$

である（例えば，飛田，櫃田［8］，p. 28，ロザノフ［15］，p. 223 の脚注 1 参照）．

命題 1 標準ウィナー過程（$\sigma=1$）$z(t)$ の確率微分 $dz(t)$ に対して，

$$E[dz(t)]=0, \qquad (6)$$

$$E[(dz(t))^2]=dt, \qquad (7)$$

$$E[(dz(t))^k]=0, \quad (k=3,4,\cdots), \tag{8}$$

証明　$m_k=E\{[z(t+dt)-z(t)]^k\}=E[(dz(t))^k]$ とおき，$(dt)^k=0$, $k=2,3,\cdots$, なることに留意すれば，(4) または (5) から明らか.

命題2　標準ウィナー過程 $z(t)$ の確率微分 $dz(t)$ に対して，

$$(dz(t))^2=dt^{1)} \tag{9}$$

証明　(7)，(8) および $(dt)^2=0$ より，分散 $V[(dz(t))^2]=E[(dz(t))^4]-(E[(dz(t))^2])^2=0-(dt)^2=0$. よって $(dz(t))^2$ は非確率変数であるから，確率1で $(dz(t))^2=E[(d(z(t))^2]$ (ロザノフ [15], p. 44) である. よって (7) から $(dz(t))^2=dt$.

命題3　標準ウィナー過程 $z(t)$ の確率微分 $dz(t)$ に対して，$dz(t)\cdot dt=0$　(10)

証明　$(dt)^2=0$ より分散 $V[dx(t)\cdot dt]=E[(dz(t)\cdot dt)^2]-(E[dz(t)\cdot dt])^2=(dt)^2(E[(dz(t))^2]-(E[dz(t)])^2)=0$. よって $dz(t)\cdot dt=E[dz(t)\cdot dt]=dt\cdot E[dz(t)]=0$.

命題4　$t>s$ なるとき，標準ウィナー過程 $z(t)$ の確率微分 $dz(t)$, $dz(s)$ に対して，

$$E[dz(t)\cdot dz(s)]=0. \tag{11}$$

証明　dt, ds を $0<dt=ds<t-s$ なるようにとると，$s<s+ds<t<t+dt$ であるから，ウィナー過程の性質 [II] より，

$$E[dz(t)\cdot dz(s)]=E[(z(t+dt)-z(t))\cdot(z(s+ds)-z(s))]=0.$$

命題5　二つの標準ウィナー過程 $z_i(t)$, $z_j(t)$ の確率微分をそれぞれ $dz_i(t)$, $dz_j(t)$ とし，$dz_i(t)$ と $dz_j(t)$ の相関係数を $\rho_{ij}(t)$ とする. このとき，

$$dz_i(t)\cdot dz_j(t)=\rho_{ij}(t)dt. \tag{12}$$

証明　(6) より，共分散 $Cov[dz_i(t),\ dz_j(t)]=E[dz_i(t)\cdot dz_j(t)]-E[dz_i(t)]\cdot E[dz_j(t)]$
$=E[dz_i(t)\cdot dz_j(t)]$.　(13)

(6)，(7) より，分散 $V[dz_i(t)]=E[(dz_i(t))^2]-(E[dz_i(t)])^2=dt-0=dt$.　(14)

また相関係数 $\rho_{ij}(t)$ を用いれば，(14) より共分散は，$Cov[dz_i(t),\ dz_j(t)]$
$=\rho_{ij}(t)\cdot\sqrt{V[dz_i(t)]}\cdot\sqrt{V[dz_j(t)]}=\rho_{ij}(t)\cdot\sqrt{dt}\cdot\sqrt{dt}=\rho_{ij}(t)\cdot dt$.　(15)

(13)，(15) より

$$E[dz_i(t)\cdot dz_j(t)]=\rho_{ij}(t)\cdot dt. \tag{16}$$

(16) より，分散 $V[dz_i(t)\cdot dz_j(t)]=E[(dz_i(t)\cdot dz_j(t))^2]-(E[dz_i(t)\cdot dz_j(t)])^2$
$=(dt)^2-(\rho_{ij}(t)\cdot dt)^2=(dt)^2\cdot(1-\rho^2_{ij}(t))=0$.　(17)

よって，(16)，(17) より，

$$dz_i(t)\cdot dz_j(t)=E[dz_i(t)\cdot dz_j(t)]=\rho_{ij}(t)\cdot dt.$$

伊藤型確率微分方程式

$$dx(t)=a(t,\ x(t))dt+b(t,\ x(t))dz(t), \qquad x(0)=x_0\ (\text{定数}) \tag{18}$$

---

1)　これはウィナー過程のもつ最も際立った性質であり，われわれが，通常の微積分学の微分の変換公式とは異なる，確率微分に関するいわゆる伊藤の補題（命題9）を必要とする理由は，この性質に由来している.

または同等な確率積分方程式

$$x(t)=x_0+\int_0^t a(\tau,\ x(\tau)d\tau+\int_0^t b(\tau,\ x(\tau))dz(\tau) \tag{19}$$

を考える．(18)，(19) の $z(t)$ は，標準ウィナー過程であり，$a(t,\ x(t))$，$b(t,\ x(t))$ は，$(t,\ x)$ に関して連続でリプシッツ条件，すなわち

ある定数 c があって

$$|a(t,\ x)-a(t,\ y)|+|b(t,\ x)-b(t,\ y)|\leqq c|x-y|$$

が成り立つものとする．このとき (18) は，一つしかもただ一つの解 $x(t)$ をもつ（伊藤 [9]，p. 350 の定理 66.1，[10]，p. 364 の定理 5.40 参照）．(19) の右辺第二項は通常の積分，第三項は伊藤型確率積分である．

命題 6 伊藤型確率微分方程式 (18) に対して，

$$\text{平均}\ E(dx(t))=a(t,\ x(t))dt, \tag{20}$$

$$\text{分散}\ V(dx(t))=b^2(t,\ x(t))dt. \tag{21}$$

証明 (6) より，

$$E(dx(t))=E(a(t,\ x(t))dt+b(t,\ x(t))dz(t))=a(t,\ x(t))dt+b(t,\ x(t))\cdot E(dz(t))$$
$$=a(t,\ x(t))dt.$$

(7)，(20) より，

$$V(dx(t))=E\{[dx(t)-E(dx(t))]^2\}=E\{[a(t,\ x(t))dt+b(t,\ x(t))dz(t)-a(t,x(t))dt]^2\}$$
$$=E[(b(t,\ x(t))dz(t))^2]=b^2(t,\ x(t))\cdot E[(dz(t))^2]=b^2(t,\ x(t))\cdot dt.$$

命題 7 伊藤型確率微分方程式 (18) に対して

$$dx(t)\cdot dt=0 \tag{22}$$

証明 $dt^2=0$，(10) より，

$$dx(t)\cdot dt=[a(t,x(t))dt+b(t,x(t))dz]dt=a(t,x(t))\cdot(dt)^2+b(t,x(t))\cdot(dzdt)=0$$

命題 8 二つの伊藤型確率微分方程式

$$dx_i(t)=a_i(t,\ \boldsymbol{x}(t))dt+b_i(t,\ \boldsymbol{x}(t)dz_i(t),\ x_i(0)=x_{i0}\ (\text{定数}),\ i=1,2, \tag{23}$$

において，標準ウィナー過程 $z_1(t)$，$z_2(t)$ の確率微分 $dz_1(t)$，$dz_2(t)$ の相関係数を $\rho_{12}(t)$ とするとき，

$$dx_1(t)\cdot dx_2(t)=\rho_{12}\cdot b_1(t,\ \boldsymbol{x}(t))\cdot b_2(t,\ \boldsymbol{x}(t))\cdot dt, \tag{24}$$

但し $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),\ x_2(t))$.

証明[2] $(dt)^2=0$，(10)，(12) より

$$dx_1(t)\cdot dx_2(t)=\prod_{i=1}^{2}(a_i(t,\ \boldsymbol{x}(t))dt+b_i(t,\ \boldsymbol{x}(t))dz_i(t))$$
$$=a_1a_2(dt)^2+a_1b_2(dz_2dt)+b_1a_2(dz_1dt)+b_1b_2(dz_1dz_2)$$
$$=b_1b_2\rho_{12}(t)dt.$$

2) この命題 8 は，命題 5 の証明と全く同じ手続きで証明することもできる．

以上の準備のもとで，伊藤型確率微分に関する重要な命題（伊藤の補題[3)]）を得る．

命題 9 確率過程 $x_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$ を，伊藤型確率微分方程式

$$dx_i(t)=a_i(t,\ x(t))dt+b_i(t,\ x(t))dz_i(t),\qquad x_i(t)=x_{i0}\ (\text{定数}),\ i=1,\cdots,n. \tag{25}$$

の解とし，$F(t,\ x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ を t に関して1階連続微分可能，$x_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$，に関して2階連続微分可能であるような任意の関数とする．このとき F の確率微分 dF は，

$$\begin{aligned}dF&=F_tdt+\sum_{i=1}^{n}F_idx_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}F_{ij}dx_idx_j\\&=(F_t+\sum_{i=1}^{n}F_ia_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}F_{ij})dt+\sum_{i=1}^{n}F_ib_idz_i.\end{aligned} \tag{26}$$

ただし，ここに $F_t=\partial F/\partial t$，$F_{ij}=\partial^2F/\partial x_i\partial x_j$，$c_{ij}(t)=\rho_{ij}(t)b_ib_j$，$i,j=1,2,\cdots,n$，$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$．

証明 $(dt)^k=0$，$k=2,3,\cdots$，(22)，(24) の下で，

$$[(\partial/\partial t)dt+\sum_{i=1}^{n}(\partial/\partial x_i)dx_i]^k(F)=0,\quad k=3,4,\cdots. \tag{27}$$

(27) の下で，

$$\begin{aligned}dF&=F(t+dt,\ x_1+dx_1,\ \cdots,\ x_n+dx_n)-F(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)\\&=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k!}[(\partial/\partial t)dt+\sum_{i=1}^{n}(\partial/\partial x_i)dx_i]^k(F).\end{aligned} \tag{28}$$

(25) より，

$$\sum_{i=1}^{n}F_idx_i=\sum_{i=1}^{n}F_ia_idt+\sum_{i=1}^{n}F_ib_idz_i, \tag{29}$$

$(dt)^2=0$，(22)，(24) のもとで

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[(\partial/\partial t)dt+\sum_{i=1}^{n}(\partial/\partial x_i)dx_i]^2(F)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\partial^2F/\partial x_i\partial x_j)dx_idx_j\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}F_{ij}dt.\end{aligned} \tag{30}$$

(28)～(30) より (26) を得る．

$F(t,\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ の期待時間変化率 $\mathring{F}(t,\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ として，

$$\begin{aligned}&\mathring{F}(t,\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))\\&=\lim_{dt\to 0}E_t\left[\frac{dF(t,\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))}{dt}\right]\end{aligned} \tag{31}$$

を考える．ここに E_t は，伊藤型確率微分方程式 (25) の解 $(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ が既知なる条件の下での期待演算子である．

(6)，(26) より

3) 飛田・櫃田〔8〕，pp. 197-199 の定理 A.10，伊藤〔9〕，pp. 343-349 の定理 65.1，〔10〕，p. 362 の定理 5.38，国田〔11〕，pp. 152-156 の定理 6.18，渡辺〔17〕，pp. 28-30 の定理 2.1，pp. 40-42 の定理 3.5 を参照せよ．

$$E_t[dF(t,\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))]$$

$$=E_t[(F_t+\sum_{i=1}^{n}F_ia_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}F_{ij})dt+\sum_{i=1}^{n}F_ib_idz_i]$$

$$=(F_t+\sum_{i=1}^{n}F_ia_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}F_{ij})dt+\sum_{i=1}^{n}F_ib_iE_t(dz_i)$$

$$=(F_t+\sum_{i=1}^{n}F_ia_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}F_{ij})dt. \tag{32}$$

よって (31), (32) より,

$$\mathring{F}(t,\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))=F_t+\sum_{i=1}^{n}F_ia_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}F_{ij}. \tag{33}$$

いま, 微分演算子 $\mathscr{L}(\cdot)$ を,

$$\mathscr{L}(\cdot)=\sum_{i=1}^{n}a_i(\partial/\partial x_i)(\cdot)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(\partial^2/\partial x_i\partial x_j)(\cdot) \tag{34}$$

と定義すれば, (33), (34) から,

$$\mathring{F}(t,\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))=F_t+\mathscr{L}(F). \tag{35}$$

また, (26), (34) から, dF を微分演算子 $\mathscr{L}(\cdot)$ を用いて表わせば,

$$dF=(F_t+\mathscr{L}(F))dt+\sum_{i=1}^{n}F_ib_idz_i.$$

これより $0\leqq s\leqq t$ に対して,

$$F(t,\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))-F(s,\ x_1(s),\ \cdots,\ x_n(s))$$

$$=\int_s^t[F_\tau+\mathscr{L}(F(\tau,\ x_1(\tau),\ \cdots,\ x_n(\tau)))]d\tau+\sum_{i=1}^{n}\int_s^t F_ib_idz_i(\tau),$$

となるから, (6) より,

$$E_s\{F(t,\ x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))\}-F(s,\ x_1(s),\ \cdots,\ x_n(s))$$

$$=\int_s^t[F_\tau+\mathscr{L}(F(\tau,\ x_1(\tau),\ \cdots,\ x_n(\tau)))]d\tau. \tag{36}$$

これは, 伊藤・ドゥインキンの公式と呼ばれているものに他ならない.

IV 確率的最適制御

制御変数 $\boldsymbol{y}\in Y$ を含む伊藤型確率微分方程式

$$x_i(t)=a_i(t,\ \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t))dt+b_i(t,\ \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t))dz_i(t),\ x_i(0)=x_{i0}(\text{定数}),\ i=1,2,\cdots,n, \tag{37}$$

を制約条件とし, 目的関数

$$E_0\left[\int_0^T u(t,\ \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t))dt+B(T,\ \boldsymbol{x}(T))\right] \tag{38}$$

を最大化する確率的最適制御問題を考える[4]. 但し $x(t)=(x_1(t), \cdots, x_n(t))$, $y(t)=(y_1(t), \cdots, y_m(t))$ とする.

いま, Vを

$$V(t, x(t))=\max_{y\in Y}E_t\left[\int_t^T u(\tau, x(\tau), y(\tau))d\tau+B(T, x(T))\right] \tag{39}$$

と定義し, これにベルマンの最適性の原理を適用する. dt を十分に小さくすると,

$$V(t, x(t))=\max_{y\in Y}E_t\left[\int_t^{t+dt} u(\tau, x(\tau), y(\tau))d\tau+\int_{t+dt}^T u(\tau, x(\tau), y(\tau))d\tau+B(T, x(T))\right]$$

$$=\max_{y\in Y}E_t[u(t, x(t), y(t))dt+o(dt)+\int_{t+dt}^T u(\tau, x(\tau), y(t))d\tau+B(T, x(T))]$$

$$=\max_{y\in Y}E_t[u(t, x(t), y(t)dt+o(dt)+E_{t+dt}[\int_{t+dt}^T u(\tau, x(\tau), y(\tau))d\tau+B(T, x(T))]]$$

$$=\max_{y}E_t[u(t, x(t), y(t))dt+o(dt)+V(t+dt, x(t+dt))]$$

$$=\max_{y}E_t[u(t, x(t), y(t))dt+o(dt)+V(t+dt, x(t+dt))-V(t, x(t))+V(t, x(t))],$$

よって,

$$0=\max_{y}E_t[u(t, x(t), y(t))dt+o(dt)+V(t+dt, x(t)+dx)-V(t, x(t))],$$

両辺を dt で割り $dt\to 0$ ならしめると,

$$0=\max_{y}\left\{u(t, x(t), y(t))+\lim_{dt\to 0}E_t\left[\frac{dV(t, x(t))}{dt}\right]\right\}. \tag{40}$$

(31), (34), (35), (40) より

$$0=\max_{y}\{u(t, x(t), y(t))+V_t+\mathscr{L}(V(t, x(t)))\}, \tag{41}$$

ここに,

$$\mathscr{L}(V(t, x(t))=\sum_{i=1}^n V_i a_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}V_{ij}, \tag{42}$$

$V_t=\partial V/\partial t$, $V_i=\partial V/\partial x_i$, $V_{ij}=\partial^2 V/\partial x_i\partial x_j$, $c_{ij}=\rho_{ij}(t)b_ib_j$, $i, j=1, 2, \cdots, n$, とする.

(39) より

$$V(T, x(T))=B(T, x(T)). \tag{43}$$

上述の確率的最適制御問題は, 微分方程式を制約条件とする確定的最適制御問題を一般化したものに他ならない. 実際, 制御変数 $y\in Y$ を含む微分方程式

$$x_i(t)=a_i(t, x(t), y(t)),\ x_i(0)=x_{i0}\ (\text{定数}),\ i=1, 2, \cdots, n, \tag{37$'$}$$

を制約条件とし, 目的関数

4) クシュナー〔12〕, 第11章, pp. 323-361, フレミング・イシュエル〔6〕, 第11章, pp. 151-197 を参照.

$$\int_0^T u(t,\ x(t),\ y(t))dt + B(T,\ x(T)) \tag{38$'$}$$

を最大化する確率的最適制御問題において，$\{x(t),\ y(t) : t\in[0,\ T],\ x\in Y\}$ が最適解(径路)であるための必要条件は，周知の如く，

$$0=\max_y\{u(t,\ x(t),\ y(t))+V_t+\sum_{i=1}^n V_i a_i\}, \tag{41$'$}$$

$$V(T,\ x(T))=B(T,\ x(T)), \tag{43}$$

であるが，このハミルトン・ヤコビの方程式 (41)$'$ は，(41)，(42) において $c_{ij}=\rho_{ij}b_ib_i=0$, $i, j=1, 2, \cdots, n$ と置いたものに他ならない．そしてこれは，微分方程式 (37)$'$ が，伊藤型確率微分方程式 (37) において $b_i=0$, $i=1, 2, \cdots, n$ と置いたものに他ならぬことに対応しているのである．

命題10　条件 (37) をみたす解を $\{x(t),\ y(t) : t\in T,\ y\in Y\}$，条件 (37)，(41)，(43) をみたす解を $\{x^*(t),\ y^*(t) : t\in T,\ y^*\in Y\}$ とすれば，$\{x^*(t),\ y^*(t) : t\in T,\ y^*\in Y\}$ は最適解（径路）である．

証明　$\{x(t),\ y(t) : t\in T,\ y\in Y\}$ と $\{x^*(t),\ y^*(t) : t\in T,\ y^*\in Y\}$ に対して，(41) より

$$0=u(t,\ x^*(t),\ y^*(t))+V_t+\mathscr{L}(V(t,\ x^*(t)))\geqq u(t,\ x(t),\ y(t))+V_t+\mathscr{L}(V(t,\ x(t))). \tag{44}$$

(44) の両辺を 0 から T まで積分し期待値をとれば，

$$E_0\left[\int_0^T u(\tau,\ x^*(\tau),\ y^*(\tau))d\tau+V_\tau+\mathscr{L}(V(\tau,\ x^*(\tau)))\right]$$

$$\geqq E_0\left[\int_0^T u(\tau,\ x(\tau),\ y(\tau))d\tau+V_\tau+\mathscr{L}(V(\tau,\ x(\tau)))\right]. \tag{45}$$

(45) に，伊藤・ドゥインキンの公式 (36) を適用すれば，

$$E_0\left[\int_0^T u(\tau,\ x^*(\tau),\ y^*(\tau))d\tau+V(T,\ x^*(T))-V(0,\ x^*(0))\right]$$

$$\geqq E_0\left[\int_0^T u(\tau,\ x(\tau),\ y(\tau))d\tau+V(T,\ x(T))-V(0,\ x(0))\right]. \tag{46}$$

$x^*(0)=x(0)=x_0$ (定数)，したがって $V(0,\ x^*(0))=V(0,\ x(0))$，および $V(T,\ x^*(T))=B(T,\ x^*(T))$，$V(T,\ x(T))=B(T,\ x(T))$ なることに留意して，(46) から

$$E_0\left[\int_0^T u(\tau,\ x(\tau),\ y^*(\tau))d\tau+B(T,\ x^*(T))\right]$$

$$\geqq E_0\left[\int_0^T u(\tau,\ x(\tau),\ y(\tau))d\tau+B(T,\ x(T))\right].$$

V 伊藤の補題および確率的最適制御の経済問題への応用
――最適消費・資産選択問題――

いま，二種類の資産，危険資産と確実資産があり，資産の収穫率は，時点 t の資産価格を $p_i(t)$ とするとき

$$dp_i(t)/p_i(t)=a_i dt+b_i dz_i(t),\quad i=1,2, \tag{47}$$

で与えられるものとする[5]．ここで資産2（確実資産）に関する a_2, b_2 は定数であり，$a_2=r$, $b_2=0$ とし，z_i（つまり z_1）は標準ウィナー過程とする．

消費者の所得は，資産からの収益のみとし，時点 t の消費を $c(t)$，富を $W(t)$，富に占める資産1（危険資産）の保有比を $w_1(t)$ とすれば，富の増分 $dW(t)$ は，

$$\begin{aligned} dW(t)&=w_1(t)W(t)(dp_1(t)/p_1(t))+(1-w_1(t))W(t)(dp_2(t)/p_2(t))-c(t)dt\\ &=w_1(t)W(t)(a_1dt+b_1dz_1(t))+(1-w_1(t))W(t)(rdt)-c(t)dt\\ &=[w_1(t)(a_1-r)W(t)+rW(t)-c(t)]dt+w_1(t)W(t)b_1dz_1(t), \end{aligned} \tag{48}$$

である．時点0の富の保有残高 $W(0)$ は

$$W(0)=W_0\ (\text{所与}) \tag{49}$$

とする．消費者は，計画期間 $[0,\ T]$ にわたる消費の効用 $u(t,\ c(t))$ の和と計画期末 T の富の効用 $B(T,\ W(T))$ との総和の期待値（期待効用）

$$E_0\left[\int_0^T u(t,\ c(t))dt+B(T,\ W(T))\right]$$

を，条件 (48), (49) のもとで最大ならしめるように各時点の消費・資産選択を決定すると仮定する（マートン [13], [14]）．最大期待効用を，

$$V(t,\ W(t))=\max_{c(\tau),\,w_1(\tau)} E_t\left[\int_t^T u(\tau,\ c(\tau))d\tau+B(T,\ W(T))\right], \tag{50}$$

---

5) (47) の解 $p_i(t)$ に対して，$\log p_i(t)$ なる関数を考え，これに伊藤の補題（命題9）を適用すれば，

$$\begin{aligned} d\log p_i(t)&=(dp_i(t)/p_i(t))-\frac{1}{2}(dp_i(t)/p_i(t))^2=(a_idt+b_idz_i(t))-\frac{1}{2}b_i^2dt\\ &=(a_i-\frac{1}{2}b_i^2)dt+b_idz_i(t) \end{aligned}$$

両辺を0から t まで積分すれば，

$$\log(p_i(t)/p_i(0))=\int_0^t(a_i-\frac{1}{2}b_i^2)d\tau+\int_0^t b_idz_i(\tau).$$

特に a_i, b_i が定数のときは，

$$\log(p_i(t)/p_i(0))=(a_i-\frac{1}{2}b_i^2)t+b_i(z_i(t)-z_i(0))$$

となるから，$p_i(t)$ は，

平均 $E[\log(p_i(t)/p_i(0)]=(a_i-\frac{1}{2}b_i^2)t,$

分散 $V[\log(p_i(t)/p_i(0))]=E(b_i^2(z_i(t)-z_i(0))^2)=b_i^2t,$

をもつ，対数正規分布をなす．

と定義すれば，明らかに

$$V(T,\ W(T))=B(T,\ W(T)). \tag{51}$$

また (41), (42) より

$$0=\max_{c(t),\,w_1(t)}\{u(t,\ c(t))+V_t+(w_1(a_1-r)W+rW-c)V_W+\frac{1}{2}(w_1Wb_1)^2V_{WW}\}. \tag{52}$$

(53) より，最適消費 c^*，最適危険資産保有比 w_1^* について，

$$\partial u/\partial c=V_W, \tag{53}$$

$$w_1=-(a_1-r)V_W/Wb_1{}^2V_{WW} \tag{54}$$

が成立していなければならない．(52) を W について偏微分すれば (V が W に関して3階微分可能であると仮定してのことであるが)，

$$V_{tW}+(w_1(a_1-r)+r)V_W+(w_1(a_1-r)W+rW-c)V_{WW}$$
$$+(w_1b_1)^2WV_{WW}+\frac{1}{2}(w_1Wb_1)^2V_{WWW}=0. \tag{55}$$

また，(54) より

$$w_1b_1WV_{WW}=-(a_1-r)V_W/b_1, \tag{56}$$

$$(w_1b_1)^2WV_{WW}=-w_1(a_1-r)V_W. \tag{57}$$

(55), (57) より，

$$(w_1(a_1-r)W+rW-c)V_{WW}+V_{tW}+\frac{1}{2}(w_1Wb_1)^2V_{WWW}=-rV_W. \tag{58}$$

V_W は，富を1単位変化させたときの最大期待効用の変化量であるから

$$\lambda(t)=V_W(t,\ W(t)) \tag{59}$$

とおけば，$\lambda(t)$ は富のシャドウ・プライスである．(59) に伊藤の補題（命題9）を適用すれば，

$$d\lambda(t)=V_{Wt}dt+V_{WW}dW+\frac{1}{2}V_{WWW}(dW)^2$$
$$=[V_{Wt}+(w_1(a_1-r)W+rW-c)V_{WW}+\frac{1}{2}(w_1Wb_1)^2V_{WWW}]dt+w_1b_1WV_{WW}dz_1(t). \tag{60}$$

(56), (58), (59) を (60) に代入すれば，

$$d\lambda(t)=-r\lambda(t)dt-((a_1-r)\lambda(t)/b_1)dz_1(t).$$

また (51), (59) より

$$\lambda(T)=\partial B(T,\ W(T))/\partial W.$$

いま

$F(\lambda(t))=\log\lambda(t)$ とおけば，伊藤の補題より

$$dF=F_\lambda d\lambda+\frac{1}{2}F_{\lambda\lambda}(d\lambda)^2$$
$$=[-r-\frac{1}{2}(a_1-r)^2/b_1{}^2]dt-[(a_1-r)/b_1]dz_1(t). \tag{61}$$

(61) を0から t まで積分すれば

$$F(\lambda(t))-F(\lambda(0))=\log(\lambda(t)/\lambda(0))$$

$$= -rt - \frac{1}{2}\int_0^t [(a_1-r)^2/b_1^2]d\tau - \int_0^t [(a_1-r)/b_1]dz_1(\tau),$$

すなわち，

$$\lambda(t)/\lambda(0) = \exp\{-rt - \frac{1}{2}\int_0^t [(a_1-r)^2/b_1^2]d\tau - \int_0^t [(a_1-r)/b_1]dz_1(\tau)\}.$$

とくに a_1, b_1 が定数のときは，

$$\log(\lambda(t)/\lambda(0)) = [-(r+\frac{1}{2}(a_1-r)^2/b_1^2)t - ((a_1-r)/b_1)(z_1(t)-z_1(0)).$$

よって $E[z_1(t)-z_1(0)]=0$, $E[(z_1(t)-z_1(0))^2]=t$ なることに注意すれば，

$$平均\ E[\log(\lambda(t)/\lambda(0))] = -[r+\frac{1}{2}((a_1-r)^2/b_1^2)]t, \tag{62}$$

$$分散\ E[\log(\lambda(t)/\lambda(0))] = [(a_1-r)^2/b_1^2]t. \tag{63}$$

脚注 5), (53), (59), (62), (63) から，a_i, b_i, $i=1,2$ が定数であるとき，次の命題を得る．

命題11 最適消費・資産選択問題において，危険資産の価格が対数正規分布をなすとき，最適径路に沿う富のシャドウ・プライスしたがって消費の限界効用は対数正規分布をなす．

参照文献

〔1〕 Bellman, R.: *Dynamic Programming*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1957.

〔2〕 Bismut, J.—M.: "Growth and Optimal Intertemporal Allocation of Risks," *Journal of Economic Theory*, 10 (1975), 239-257.

〔3〕 Brock, W. A. and M. J. P. Magill: "Dynamics under Uncertainty," *Econometrica*, Vol. 47, No. 4 (July, 1979), 843-868.

〔4〕 Chow, G. C.: "Optimum Control of Stochastic Differential Equation Systems," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1 (1979), 143-175.

〔5〕 Fischer, S.: "The Demand for Index Bonds," *Journal of Political Economy*, Vol. 83, No. 3 (June 1975), 509-534.

〔6〕 Fleming, W. H. and R. W. Rishel: *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. New York: Springer-Verlag, 1975.

〔7〕 Hamada, K.: "An Application of Continuous Time Stochastic Control to a Problem of Dynamic Portfolio Choice,"『経済研究』, Vol. 23, No. 2 (1972), 159-165.

〔8〕 飛田武幸・櫃田倍之：『ガウス過程』(紀伊国屋数学叢書 9)．東京：紀伊国屋書店，1976.

〔9〕 伊藤清：『確率論』(現代数学14)．東京：岩波書店，1953 (第1刷)，1973 (第14刷)．

〔10〕 ———：『確率論 I・II・III』(岩波講座基礎数学)．東京：岩波書店，1976(I)，1977(II)，1978(III)．

〔11〕 国田寛：『確率過程の推定』(数理解析とその周辺14)．東京：産業図書，1976.

〔12〕 Kushner, H. J.: *Introduction to Stochastic Control Theory*. New York: Holt, Rinehart, Winston, 1971.

〔13〕 Merton, R. C.: "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, No. 4 (December, 1971), 373-413.

〔14〕 ———: "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, Vol. 44, No. 5 (September, 1973), 867-887.

〔15〕 ロザノフ，ユ・ア (佐藤健一・佐藤由身子訳)：『確率過程論』．東京：産業図書，1980.

〔16〕 Smith, C. W.: "Applications of Option Pricing Analysis," *Handbook of Financial Economics* (Bicksler, ed.). North-Holland, 1979.

〔17〕 渡辺信三：『確率微分方程式』(数理解析とその周辺 9)．東京：産業図書，1975.

(昭和55年11月10日受付 創価大学助教授)